TD n°02

**Combinatoire énumérative (Corrigé type)**

**Exercice 1** **(**Relation d'équivalence)

La relation est

* *Réflexive* car x+x=2x est pair.
* *Symétrique* car x+y=y+x et donc si x+y est pair donc y+x est pair.
* *Transitive*car si x$R$y et y$R$z, alors x+y=2k et y+z=2l pour deux entiers ket l.

Si on effectue la somme des ces deux égalités on trouve x+z+2y=2k+2l=x+z=2(k+l-y)

et donc x+z est pair.

Pour déterminer la classe d’équivalence de $R$, il suffit de trouver une famille d’ensemble (Ei) tel que :

* La réunion de Ei est $Z$.
* Les Ei sont deux à deux disjoints.
* Si x et y sont dans le même Ei , alors x$R$y.
* Si x est dans Ei et y dans Ej avec i≠j, alors x n’est pas en relation avec y.

Ici, on peut constater que tous les éléments en relation avec 0 sont les entiers pairs, tandis que tous les entiers en relation avec 1 sont les entiers impairs. Puisque l’ensemble des entiers pairs et l’ensemble des entiers impairs forme une partition de $Z$, on en déduit que ces deux ensembles sont exactement les deux classes d’équivalence de $Z$.

**Exercice 2**  **(**Relation d’ordre**)**

* Soit A∈ P(E), comme A=A, A$R$A la relation est réflexive.
* Soit(A,B) ∈ P(E)2

On suppose que A$R$B et B$R$A

Si l’on avait A≠B, on aurait x∈ A⋂B̅ et x ∈ B⋂A̅, donc on aurait x∈ A⋂A̅, ce qui impossible on a donc prouvé que A=B.

La relation est antisymétrique.

* Soit (A,B,C) ∈P(E)3

On suppose que A$R$B et B$R$C

* Si A=B et B=C alors A=C , donc A$R$C.
* Si A=B et x ∈ B⋂C̅ alors x∈ A⋂C̅ donc A$R$C.
* Si x ∈ A⋂B̅ et B=C alors x∈ A⋂C̅ donc A$R$C.
* Les conditions x∈ A⋂B̅ et x∈ B⋂C̅ sont incompatible car elles donnent x∈ B et x $\notin $¯B.

Par disjonction des cas ; on a prouvé que A$R$C.

La relation est transitive.

**Exercice 3 (**Ensembles dénombrables)

1. Oui, car c’est une partie de $N $ou bien l’application n↦2n est une bijection de $N$ sur cet ensemble : $N$ ↦E

 n↦2n

1. Non, car $R$ ne l'est pas et cet ensemble contient $R$. Plus précisément, l'application x↦(0,x) est une injection de $R$ dans $N×R $.
2. Oui, car l'application ϕ:(a,b)↦a+b√2 est une surjection (et même une bijection car √2 est irrationnel) de $Q$2 dans $Q$ [√2].
3. Oui, car c’est une partie de $N.$
4. Non, car il contient$R$.

**Exercice 4 (**Notion de cardinal)

On commence par remarquer que, si on a prouvé que le nombre de parties de cardinal pair d'un ensemble à n élément est 2n−1, alors le nombre de parties du même ensemble qui sont de cardinal impair vaut également 2n−1. En effet, le nombre total de parties, qui vaut 2n, est la somme du nombre de parties de cardinal pair et du nombre de parties de cardinal impair.
Démontrons maintenant le résultat. On procède par récurrence sur n. Si n=1, la seule partie de E de cardinal pair est $∅. $On a bien 1=20. Supposons maintenant le résultat démontré au rang n, et prouvons-le au rang n+1. Soit donc E de cardinal n+1, et écrivons E={a}∪F où F est de cardinal n. Alors une partie de E de cardinal pair

* ou bien contient a, et on doit alors la compléter avec une partie de cardinal impair de F. Il y a 2n−1 telles parties.
* ou bien ne contient pas a, et c'est également une partie de cardinal pair de F. Il y a là aussi exactement 2n−1 telles parties.

Finalement, on trouve que le nombre de parties de E de cardinal pair vaut 2n−1. L'hypothèse de récurrence est donc prouvée au rang n+1.

**Exercice 5** (Majorant, minorant, borne supérieure, borne inférieure maximum, minimum)

1. $\left[0,1\right]∩Q$
* Les majorants : ce sont les$M\in \left[1,+\infty \right[$.
* Les minorants : ce sont les$m\in \left]-\infty ,0\right]$.
* La borne supérieure : 1.
* La borne inférieure : 0.
* Le maximum : 1.
* Le minimum : 0.
1. $\left]0,1\right[∩Q$
* Les majorants: ce sont les$M\in \left[1,+\infty \right[$.
* Les minorants : ce sont les$m\in \left]-\infty ,0\right]$.
* La borne supérieure : 1.
* La borne inférieure : 0.
* Le maximum : Non.
* Le minimum : Non
1. $N$
* Les majorants : Non
* Les minorants : ce sont les$m\in \left]-\infty ,0\right]$.
* La borne supérieure : Non.
* La borne inférieure :0.
* Le maximum : Non.
* Le minimum : 0.
1. $\left\{(-1)^{n}+\frac{1}{n^{2}}|nϵN^{\*}\right\}$.
* Les majorants : ce sont les$M\in \left[\frac{5}{4},+\infty \right[$.
* Les minorants : ce sont les$m\in \left]-\infty ,-1\right]$.
* La borne supérieure:$\frac{5}{4}.$
* La borne inférieure :-1.
* Le maximum :$\frac{5}{4}.$
* Le minimum : Non.

**Exercice 6** (Nombre de surjections entre ensembles finis)

1. $S\_{n,p}=0.$
2. $ S\_{n,n}=n!$ .

$S\_{n,1}=1$.

 et $S\_{n,2}=2^{n}-2$.

1. $ S\_{p+1,p}=\frac{p}{2}\left(p+1\right)!$.