TD n°03

**Théorie des** **graphes(corrigé type)**

**Exercice 1 (**Graphe simple**)**

Soit G un graphe non orienté à n sommets. Soit D l’ensemble des degrés des sommets de G. Puisque chaque sommet est relié à au plus n − 1 autres sommets,

D ⊆ {0,...,n − 1}. Supposons que les degrés des sommets soient différents, D est de cardinal n et donc, nécessairement, D = {0,...,n−1}. Mais G ne peut contenir simultanément un sommet de degré 0 et un sommet de degré n−1, puisque un sommet de degré n−1 est relié à tous les autres sommets du graphe. Donc |D| < n et deux sommets au moins ont même degré.

**Exercice 2(**Matrice associée, graphe complet, graphe connexe**)**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Sommet | A | B | C | D | E | F |
| Degré | 4 | 5 | 3 | 4 | 2 | 2 |

0 1 1 1 0 1

1 0 1 1 1 1

1 1 0 1 0 0

1. La matrice H du graphe est : H= 1 1 1 0 1 0

0 1 0 1 0 0

1 1 0 0 0 0

1. Ce graphe est connexe car, pour chaque paire de sommets, il existe une chaîne les reliant.
2. Ce graphe n’est pas complet car, par exemple, les sommets E et F ne sont pas adjacents.
3. Pour une chaine eulérienne le graphe doit être connexe et exactement a 2 sommets de degré impair
4. Pour un cycles eulériens excite chaque sommet doit être de degré pair

**Exercice 3**

1. Dans un graphe non orienté à n sommets, il y a paires de sommets. Chacune de ces paires peut constituer ou ne pas constituer une arête du graphe. Ce qui donne graphes possibles sur un ensemble fixé de n sommets. Pour n = 4 on obtient 26 = 64 graphes possibles.

**Exercice 4** (Isthme)

 La propriété que l'on cherche à prouver est la suivante : dans un graphe simple connexe dont tout sommet est de degré pair, la suppression d'une arête ne détruit pas la connexité du graphe.

 On raisonne par l'absurde, et on suppose que la suppression de l'arête AB entraîne le fait que le graphe n'est plus connexe. Alors A et B sont dans deux composantes connexes disjointes (si on peut encore aller de A à B sans l'arête AB, c'est que celle-ci ne servait à rien...). Soit G1 la composante connexe contenant A. Alors tous les sommets de G1 sont de degré pair, sauf A qui est de degré impair. Cela signifie que la somme des degrés des éléments de G1 est un nombre impair, ce qui est impossible

2

**Exercice 5**

Soit G(V, E) un graphe simple, et soit V=P∪I et P∩I=∅ tel que P est l’ensemble  
des sommets de degré pair et I l’ensemble des sommets de degré impair.  
D’après le lemme de l’Exercice 5, on a :

Nous avons aussi que 2 ∙ |E| et ∑pP deg(p) sont pairs, ce qui implique que  
∑iI deg(i) est aussi pair.

⇒ (2𝑘1 + 1) + ⋯ + (2𝑘𝑛 + 1) = 2. 𝐿

tel que ‘n’ est le nombre des sommets de degré impaire.

⇒ 2(𝑘1 + ⋯ + 𝑘𝑛) + 𝑛 = 2. 𝐿  
⇒ 𝑛 = 2. 𝑚

Ça veut dire que le nombre ‘n’ de sommets de degré impaire doit être pair.

**Exercice 6**

Nous allons modéliser le problème par un graphe simple, tel que les sommets  
représentent les ordinateurs et les arêtes représentent les liaisons entre eux.  
Si on relie chaque ordinateur à exactement 3 autres ordinateurs, les sommets du  
graphe auront tous un degré impair. Mais, d’après le résultat de l’Exercice 5, ce  
graphe doit avoir un nombre pair de sommets de degré impair (3), donc le réseau est  
impossible

**Exercice 7** (Coloration)

Désignons par G1, G2, G3, les trois graphes représentés de gauche à droite ont respectivement pour nombre chromatique 3, 2 et 3 :

1

2

1

1

2

2

1

3

2

1

2

2

1

1

2

1

2

1

3

**Exercice 8** (graphe biparti)

1. Non

• tout graphe biparti G peut être coloré en 2 couleurs. En effet, on sait qu'on peut partitionner G en V1 et V2 tel que tout arrête de G à une extrémité dans V1 et l'autre dans V2. On peut don colorer les sommets de V1 ave la couleur 1 et les sommets de V2 ave la couleur 2

• un cycle impair nécessite 3 couleurs pour être colorer ⇒ contradiction.

1. Algorithme

W = V ;

choisir un sommet x ∈ V et le marquer + ;

tant que W ≠ ∅, faire

choisir un sommet marqué v dans W ;

marquer tous ses voisins avec le signe opposé ;

si un sommet reçoit 2 signes opposés : STOP, le graphe n'est pas biparti ;

W = W − {v}.

Si chaque sommet a reçu un seul signe alors on a G = (V1, V2, E) ave V1 = {v ∈ V |v marqué +} et V2 = {v ∈ V |v marqué −}.

**Exercice 9** (Algorithme de de Welsh et Powell)