

TD N°01

Combinatoire énumérative

Exercice 1 (Le nombre d'applications différentes de **E** dans **F**)

Soient **E** et **F** deux ensembles ayant respectivement n et p éléments

- Montrer que le nombre d'applications de **E** dans **F** est égal à p^n .

Exercice 2 (Principe de recollement)

- Montrer le principe de recollement (Théorème 2.1).

Exercice 3 (Injectives, Surjectives, Bijectives)

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \rightarrow n + 1$.
2. $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \rightarrow n + 1$.
3. $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \rightarrow (x + y, x - y)$.
4. $k: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \frac{x+1}{x-1}$. si k est bien démontrer qu'elle n'est pas surjective changer l'ensemble d'arrivée afin que k devienne surjective.

Exercice 4 (Injectives, Surjectives)

- Montrer que : $(g \circ f \text{ injective} \Rightarrow f \text{ injective})$ et $(g \circ f \text{ surjective} \Rightarrow g \text{ surjective})$.

Exercice 5 (Le chiffrement par décalage)

Soit un cryptosystème par décalages successifs définit sur une application f d'un ensemble $E = \{1, 5\}$ dans un ensemble $F = \{0, 4\}$. Sa méthode de codage consistait à décaler les lettres de $(x_i + y_i)$ (y_i : l'image de x_i par f et $i = \{1, 2\}$) rangs, vers la droite, dans l'alphabet $(A \dots Z)$.

- Trouver l'espace de clé puis déduire la clé secrète.
- Déchiffrer le mot suivant : **FMFNFOUEFDPN CJOBUPJSF**

Exercice 6 Soit la fonction $f: A \rightarrow B$ définie par $f(x) = 2x - 3$, où A et B sont les ensembles des nombres réels. Trouvez la fonction inverse $g: B \rightarrow A$.

Exercice 7 Considérez une fonction de chiffrement $h(x) = (x + 7)$ modulo 26 dans l'alphabet $(A \dots Z)$. En quoi cette fonction est-elle bijective ?