TD N°02

Combinatoire énumérative

Exercice 1 (Relation d'équivalence)

On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x+y$ est pair. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence de cette relation?

Exercice 2 (Relation d'ordre**)**

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble contenant au mois deux éléments et x un élément de $\mathbb{E}$ fixé.

Sur $\mathcal{P}(\mathbb{E})$ on définit $\mathcal{R}$ par :

$$A\mathcal{R}B \text{ Ssi } A=B \text{ ou } x \in A\cap\overline{B}$$

$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre vrai ou faux.

Exercice 3 (Ensembles dénombrables)

Les ensembles suivants sont-ils dénombrables?

1. $\{2^n ; n\geq 0\}$;
2. $\mathbb{N}\times\mathbb{R}$;
3. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$;
4. L'ensemble des nombres premiers ;
5. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;

Exercice 4 (Notion de cardinal)

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble fini de cardinal $n\geq 1$. Démontrer que le nombre de parties de $\mathbb{E}$ de cardinal pair vaut 2^{n-1} .

Exercice 5 (Majorant, minorant, borne supérieure, borne inférieure, maximum, minimum)

Déterminer (s'il 'existe) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure le maximum, le minimum des ensembles suivants :

$[0,1]\cap\mathbb{Q}$, $]0,1[\cap\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} | n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 6 (Nombre de surjections entre ensembles finis)

Pour tout $n \epsilon \mathbb{N}^*$, on note $E_n = \{1,2,\dots,n\}$.
On note $S_{n,p}$ le nombre de surjections de E_n sur E_p.

1. Calculer $S_{n,p}$ si p > n.
2. Calculer $S_{n,n}$, $S_{n,1}$, et $S_{n,2}$.
3. Calculer $S_{p+1,p}$.