Partie II :Théorie des graphes

PLAN

- Graphes simples
- Matrice associée au graphe.
- Arbre
- Coloration d'un graphe.
- Graphes particuliers (graphes hamiltoniens, graphes orientés,…)

Partie II :Théorie des graphes

1. Graphes simple

Définition 1.1 : Un graphe simple est un couple *G* = (*V*,*E*).

Les éléments de *V* sont appelés sommets. Les éléments de *E*, s'il en existe, sont appelés arêtes. Soit *e* = {*u*,*v*} une arête de *G*. On dit que les sommets *u* et *v* sont reliés et sont les extrémités de l'arête *e*. On dit aussi que les sommets *u* et *v* sont adjacents ou voisins et que l'arête *e* est incidente aux sommets *u* et *v*. Un sommet, qui n'admet aucun voisin, est dit isolé. Le cardinal de *V* est appelé ordre du graphe *G*. Le nombre des arêtes incidentes à un sommet *v* de *G* est appelé degré de *v* et noté *d*(*v*).

Le degré minimum de *G* est : $\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}$.

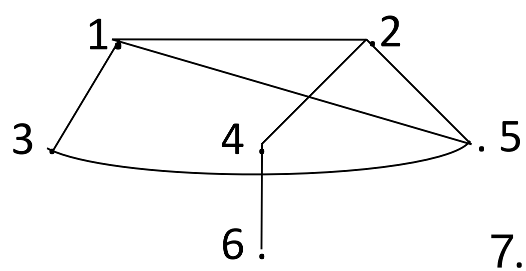
Le degré maximum de *G* est : $\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}$.

Partie II :Théorie des graphes

Représentation sur un exemple :

V = {1,2,3,4,5,6,7},

E = { {1,2},{1,3},{1,5},{2,4},{2,5},{3,5},{4,6}}.



Partie II :Théorie des graphes

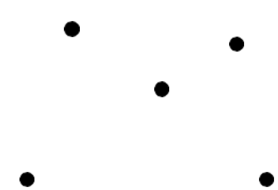
Propriété 1.2 : Si |V | = n et |E| = m, m $\leq \frac{n(n-1)}{2}$

En effet, E est un sous-ensemble de $P_2(V)$, de cardinal $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Exemples classiques 1.3 :

1) Si |V | = n et si E est vide, on dit que *G* est un n-stable.

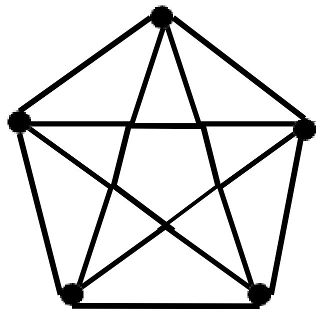
5-stable :



PARTIE II :THÉORIE DES GRAPHES

2)Si $|V| = n$ et si $E = P_2(V)$, on dit que G est un graphe complet d'ordre n (ou une n-clique), noté K_n

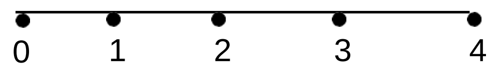
5-clique



PARTIE II :THÉORIE DES GRAPHES

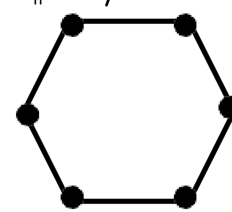
3)Si $V = [0,n]$ et si $E = \{ \{i,i + 1\} \mid i \in \{0,n - 1 \}\}$, on dit que G est une n-chaîne notée P_n ou chaîne de longueur n. Par convention, on dira qu'un sommet isolé est une 0-chaîne.

4-chaîne



4)Pour $n \geq 3$, si $V = [1,n]$ et si $E = \{ \{i,i + 1\} \mid i \in \{1,n - 1\}\} \cup \{n,1\}$, on dit que G est un n-cycle noté C_n ou cycle de longueur n

5-cycle :

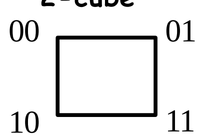


PARTIE II :THÉORIE DES GRAPHES

5)Si V est l'ensemble des nombres de k chiffres formés avec les chiffres 0 et 1 (c'est-à-dire l'ensemble des k-listes de {0,1}) et si deux sommets sont reliés, s'ils diffèrent d'exactement un chiffre, on dit que G est un k-cube.

1-cube

2-cube



PARTIE II :THÉORIE DES GRAPHES

Définition 1.4 : Soit $G = (V,E)$ un graphe simple. On appelle graphe complémentaire de G, le graphe $\overline{G}= (V,P_2(V) \setminus E)$.

Exemples : Le n-stable et la n-clique sont complémentaires. Le complémentaire du 5-cycle est un 5-cycle. On dit que le 5-cycle est auto complémentaire

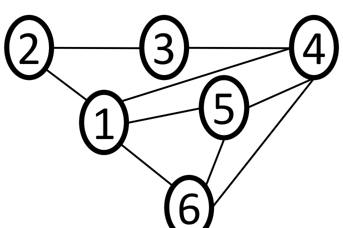
Définition 1.5 : Soit $G = (V,E)$ un graphe simple et soit W une partie non vide de V. On appelle sous-graphe de G, engendré par l'ensemble W, le graphe $G_w = (W,F)$, dont l'ensemble des sommets est W et dont l'ensemble des arêtes est l'ensemble F des arêtes est obtenu, à partir de E, en supprimant toutes les arêtes incidentes aux sommets de $V \setminus W$. On dit alors que le graphe G contient le graphe G_w .

2. Matrices associées à un graphe *La* matrice associée à un graphe d'ordre V est la matrice de dimension $V \times V$ où le terme à l'intersection de la ième ligne et de la jième colonne est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets S_i et S_j.

Exemple : Dans le tableau suivant, on a indiqué par une croix, l'existence d'une arête entre les sommets d'un graphe d'ordre 6.

sommets	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
(1)		×		×	×	×
(2)	×		×			
(3)		×		×		
(4)	×		×		×	×
(5)	×			×		×
(6)	×			×	×	

On a dessiné ci-dessous le graphe G représentant cette situation et la matrice associée à ce graphe :



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les nombres de la première ligne (0 1 0 1 1 1) indiquent que :
le sommet (1) n'est pas relié aux sommets (3) et (1) (pas de boucle)
le sommet (1) est relié par une arête aux sommets (2), (4), (5) et (6)

3. Arbre

Définitions 3.1 : Une forêt est un *multigraphe*[1] *sans cycle*[2]. Un arbre est un *multigraphe connexe*[3] sans cycle.

Conséquences :

1) Une forêt est un graphe simple.
2) Les composantes connexes[4] d'une forêt sont des arbres.

Théorème 3.2 : Une forêt, d'ordre supérieur ou égal à 2, est un graphe *biparti.*[5]

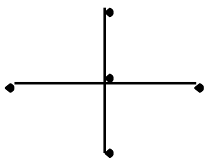
Définition 3.3 : On appelle sommet pendant ou feuille d'un multigraphe, tout sommet de degré 1.

Théorème 3.4 : Si une forêt possède au moins une arête, elle admet au moins deux sommets pendants.

Corollaire : Un arbre, d'ordre supérieur ou égal à 2, admet au moins deux sommets pendants.

Remarque 1 : Un arbre peut avoir plus de deux sommets pendants.

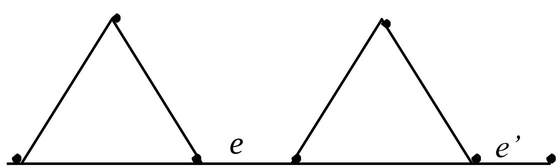
Exemple :



Remarque 3 : Les chaînes sont des arbres admettant exactement deux sommets pendants et on peut montrer que ce sont les seuls.

Définition 3.5 : Soit $G = (V,E)$ un multigraphe et soit e une arête de G. On dit que e est un *isthme* de G, si G est connexe et si $G \setminus \{e\}$ est non connexe.

Exemple : Dans le graphe suivant :



les arête e et e' sont des isthmes.

Théorème 3.6 : Soit $G = (V,E)$ un multigraphe, avec $|V| = n$ et $|E| = m$, les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) Le multigraphe G est un arbre.

(ii) Le multigraphe G est connexe et $m = n - 1$.

(iii) Le multigraphe G est sans cycle et $m = n - 1$.

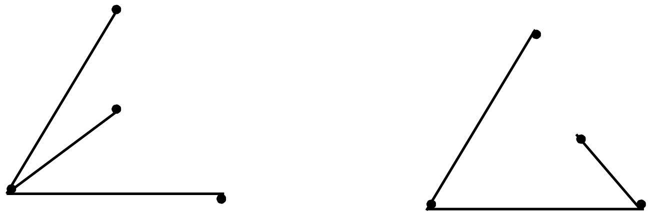
(iv) Pour tout couple (u,v) de sommets, il existe une unique chaîne d'extrémités initiale u et finale v.

(v) Le multigraphe G est connexe et toute arête de G est un isthme.

(vi) Le multigraphe G est sans cycle et pour tout couple (u,v) de sommets distincts et non adjacents, le multigraphe $(V,E \cup \{e\})$, où e est une arête d'extrémités u et v, admet un cycle. (Remarquons que ce cycle est alors unique.)

Définition 3.7 : Un *arbre couvrant* d'un multigraphe G est un graphe couvrant[6] de G , qui soit un arbre.

Exemple : Les deux arbres suivants sont des arbres couvrants de la 4-clique :



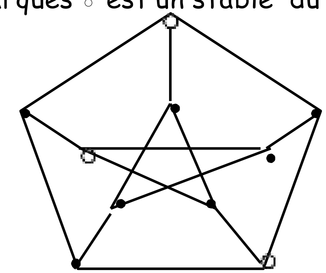
Théorème 3.8 : Un multigraphe est connexe, si et seulement s'il admet un arbre couvrant.

Corollaire : Soit $G = (V,E)$ un multigraphe, avec $|V| = n$ et $|E| = m$, si G est connexe, $m \geq n - 1$.

4. Coloration d'un graphe.

Définition 4.1 : Soit $G = (V,E)$ un multigraphe. On dit qu'une partie W de V est un stable de G, si le sous-graphe engendré par W est un graphe stable.

Exemple : L'ensemble des sommets marqués ○ est un stable[7] du graphe de Petersen suivant :



Définition 4.2 : Soit G = (V,E) un multigraphe et soit k un entier strictement positif. On dit que G est k-parti (ou multiparti) s'il existe une partition de V en $V_1 \cup \cdots \cup V_k$, telle que, pour tout i appartenant à [$1,k$], l'ensemble V_i soit stable. Le graphe G sera alors noté $G = (V_1, \ldots, V_k, E)$. Rappelons que, par définition d'une partition, les ensembles V_i sont tous non vides. Pour $k = 2$, on dit qu'un multigraphe 2-parti est biparti.

Remarque : Si G est un multigraphe k-parti, d'ordre n, on a $k \leq n$ et, pour tout h appartenent à $[k,n]$, G est h-biparti.

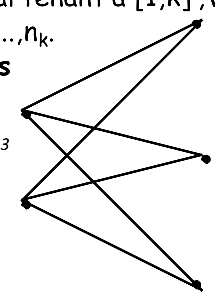
Remarque : Un multigraphe multiparti n'admet pas de boucle.
Autres exemples : Tout cycle pair est biparti.
Tout cycle impair est 3-parti.
Les multigraphes 1-partis sont les stables.

Définition 4.3 : Avec les notations précédentes, si $G = (V,E)$ est un graphe simple k-parti, tel que $E = P_2(V) \setminus \cup^{k}_{i=1} P_2(V_i)$,on dit que G est multiparti complet.

Notation : Soit G un graphe k-parti complet tel que, pour tout i appartenant à [1,k] ,V_i soit de cardinal n_i , on note
$G = K_{n1,\ldots,n_k}$.

Exemples

$K_{2,3}$



PARTIE II :THÉORIE DES GRAPHES

Définition 4.4 : Soit $G = (V,E)$ un multigraphe sans boucle et soit k un entier strictement positif. Une k-coloration des sommets de G est une application

$$g : V \longrightarrow [1,k] ,$$

telle que, si u et v sont des sommets (distincts), adjacents, on ait g(i) distinct de $g(v)$.

Un multigraphe, sans boucle, admettant une k-coloration des sommets est dit k-colorable.

Dans ce cas, si $g(u) = i$, on dit que le sommet u est colorié en i.

Interprétation : Pour tout élément i de $[1,k]$, l'ensemble $g^{-1}(\{i\})$ des sommets de G coloriés en i est un stable de G ou est vide.

Remarque 1 : L'ensemble des k-colorations d'un multigraphe est égal à l'ensemble des k-colorations du graphe simple associé.

PARTIE II :THÉORIE DES GRAPHES

Remarque 2 : Un graphe simple est k-parti, si et seulement s'il admet une k-coloration g surjective, c'est-à-dire telle que, pour tout i de $[1,k]$, l'ensemble $V_i = g^{-1}(\{i\})$ soit non vide.

Remarque 3 : Tout graphe simple G, d'ordre n, est n-colorable. L'ensemble des entiers strictement positifs k tels que G soit k-colorable est donc non vide et admet un plus petit élément.

Définition 4.5 : Soit G un graphe simple. Le plus petit entier k tel que G soit k-colorable est appelé nombre chromatique de G et est noté $\gamma(G)$.

Exemples :

Le nombre chromatique d'un graphe stable est 1.

Le nombre chromatique d'une chaîne est 2.

Le nombre chromatique d'un cycle pair est 2.

Le nombre chromatique d'un cycle impair est 3.

Le nombre chromatique du graphe de Petersen est 3.

Le nombre chromatique de la clique K_n est n.

PARTIE II :THÉORIE DES GRAPHES

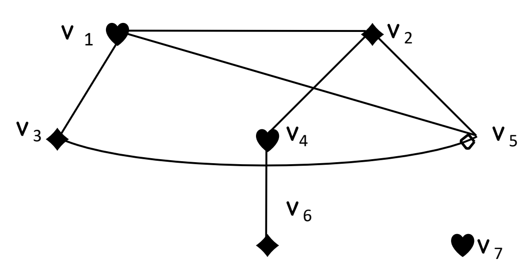
Remarque : Le nombre chromatique d'un graphe simple G est supérieur ou égal à l'ordre du plus grand sous-graphe de G, qui soit un graphe complet.

Algorithme 4.6 (Algorithme "glouton" dû à Welsh et Powell) :

On ordonne arbitrairement les n sommets du graphe simple G : $v_1, \dots ,v_n$. On attribue au sommet v_1 la couleur 1. Puis on colorie, avec la couleur 1, successivement les sommets de la liste $(v_1, \dots ,v_n)$ qui ne sont pas adjacents à un sommet déjà colorié. S'il reste des sommets non coloriés, on attribue la couleur 2 au premier sommet non colorié et on recommence le processus précédent jusqu'à épuisement des couleurs.

Exemple : Pour le graphe suivant

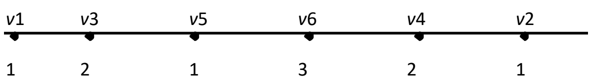
PARTIE II :THÉORIE DES GRAPHES



on obtient la 3-coloration définie par :
γ(v1) = γ(v4) = γ(v7) = 1 (sommets marqués ♥),
γ(v2) = γ(v3) = γ(v6) = 2 (sommets marqués ♦),
γ(v5) = 3 (sommet marqué ◦).

Remarque : Cet algorithme fournit une k-coloration de G, avec k ≥ γ(G), mais pas nécessairement k = γ(G).

Contre-exemple : La numérotation suivante des sommets de la chaîne de longueur 5 donne une 3-coloration, alors que son nombre chromatique est 2.



5. Graphes particuliers

1. graphes hamiltoniens

Définitions 5.1 : Soit G = (V,E) un multigraphe. Un cycle hamiltonien de G est un cycle contenant chaque sommet de G exactement une fois. Une chaîne hamiltonienne de G est une chaîne contenant chaque sommet de G exactement une fois.

On dit que G est hamiltonien, s'il possède un cycle hamilltonien.

2. Graphes eulériens

Définition 5.2 : Soit G = (V,E) un multigraphe. Un cycle eulérien de G est un cycle contenant chaque arête de G. On dit que G est un multigraphe eulérien, s'il est réduit à un sommet isolé ou s'il est connexe et admet un cycle eulérien

3. Graphes orientés

Définiton 5.3 : Un multigraphe orienté est un couple G = (V (G),A(G) , ou, plus simplement G = (V,A), où V est un ensemble fini non vide, où A est un ensemble fini, éventuellement vide, et tel que, dans le cas où A est non vide, il existe une application φ : A −→ V × V.

Les éléments de V sont appelés sommets. Les éléments de A sont appelés arcs. Soit a un élément de A, si φ(a) = (u,v), on dit que a est un arc de u vers v. On dit aussi que a est un arc sortant en u et est un arc entrant en v. On dit que a est une boucle, s'il existe u dans V, tel que φ(a) = (u,u).

Annexe

1. A l'inverse du graphe simple, le multigraphe est un graphe qui autorise des liens multiples –aussi appelés liens parallèles-. En d'autres termes, dans un multigraphe, deux sommets peuvent être connectés par plus d'un lien.
2. Un **graphe acyclique** est un graphe ne contenant aucun cycle .
3. Un graphe non orienté G=(V,E)est dit *connexe* si quels que soient les sommets u et v de V, il existe une chaine reliant u à v.
4. Un sous-graphe connexe maximal d'un graphe non orienté quelconque est une *composante connexe* de ce graphe.
5. Un graphe est dit **biparti** si son ensemble de sommets peut être divisé en deux sous-ensembles disjoints {U} et { V} tels que chaque arête ait une extrémité dans {U} et l'autre dans {V}.
6. Un arbre couvrant d'un graphe non orienté et connexe est un arbre inclus dans ce graphe et qui connecte tous les sommets du graphe.
7. stable est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents. La taille d'un stable est égale au nombre de sommets qu'il contient.