الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Batna 2

Faculté des Mathématiques et de l'informatique

Département de Mathématiques

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعـــــة باتنـــــة 2

كليـــــــة الرياضيات والإعلام الآلي

قسم الرياضيات

Analyse Numérique 2

Cours avec exercices corrigés

Par

Dr. El Amir Djeffal

2019/2020

Chapitre 1

Introduction

1.1 Rappels sur les matrices

Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base de V, un vecteur $v \in V$ admet une représentation unique dans la base $\mathcal{B}$:

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i,$$

En notation matricielle, le vecteur v s'identifie à un vecteur colonne de $\mathbb{K}^n$:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

on notera par v^T et v^* les vecteurs lignes :

$$v^T = (v_1\ v_2\ \cdots\ v_n), \qquad v^* = (\bar{v}_1\ \bar{v}_2\ \cdots\ \bar{v}_n).$$

On définit le produit scalaire dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. le produit hermitien dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) par :

$$(u, v) = u^T v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i,$$

(resp.

$$(u, v) = u^* v = \sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i v_i).$$

On dit qu'une base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ est orthonormée si :

$$e_i^* e_j = \delta_{i,j}$$

où $\delta_{i,j}$ est le *symbole de Kronecker* : $\delta_{i,j} = 1$ *si* $i = j$, $\delta_{i,j} = 0$ *si* $i \neq j$.

Soient V et W deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$, munis de bases $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ et $\{f_1, f_2, \cdots, f_m\}$ respectivement. On rappelle qu'une application linéaire $\mathcal{L}$ de l'espace vectoriel V dans l'espace vectoriel W est définie d'une manière unique par l'image de la base de V, c'est-à-dire

$$\mathcal{L}e_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i, \qquad 1 \leq j \leq n.$$

Si on note A la matrice $m \times n$ (m lignes et n colonnes) définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

on voit que la $j$ème colonne de la matrice A représente le vecteur $\mathcal{L}e_j$ et on vérifie facilement que pour tout $v \in V$ le vecteur $\mathcal{L}v$ de W est représenté par le vecteur colonne noté Av suivant :

$$(Av)_i = (\text{ ième ligne de } A)\, v, \quad 1 \leq i \leq m.$$

On définit la matrice transposée de A, notée A^T, (resp. la matrice adjointe de A, notée A^*) :

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji} = a_{ji}$$

(resp.

$$(A^*)_{ij} = \overline{(A)_{ji}} = \overline{a_{ji}}).$$

Dans toute la suite, sauf mention du contraire, les matrices considérées seront supposées carrées d'ordre n, c'est-à-dire le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes qui est égal à n.

Une matrice A carrée est par définition dite inversible s'il existe une matrice notée A^{-1}, telle que :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = (\delta_{ij}) = I = \text{ matrice identité.}$$

On vérifie facilement que si A et B sont deux matrices inversibles, alors :

$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}, \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, \quad (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Une matrice carrée $A = (a_{ij})$ est par définition :

- *symétrique* si A est réelle et $A^T = A$,
- *hermitienne* si $A^* = A$,
- *orthogonale* si A est réelle et $A^T A = AA^T = I$,
- *unitaire* si $A^* A = AA^* = I$,
- *normale* si $A^* A = AA^*$,
- *diagonale* si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, on note $A = diag(a_{ii})$,
- *triangulaire supérieure (resp. inférieure)* si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$ (resp. $a_{ij} = 0$ pour $i < j$),
- *semblable* à une matrice B s'il existe une matrice P inversible, dite matrice de passage, telle que $P^{-1}AP = B$.

- *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale.

La trace d'une matrice $A = (a_{ij})$ carrée d'ordre n est définie par

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii},$$

et son déterminant est défini par

$$det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_n} \varepsilon_\sigma a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

où $\mathcal{G}_n$ est l'ensemble de toutes les permutations de l'ensemble $\{1, 2, \cdots, n\}$ et ε_σ désigne la signature de σ.

Les valeurs propres $\lambda_i(A)$, $1 \leq i \leq n$, d'une matrice A carrée d'ordre n sont les n racines de son polynôme caractéristique :

$$P_A(x) = det(xI - A).$$

Le spectre de la matrice A est défini par

$$sp(A) = \{\lambda_1(A), \lambda_2(A), \cdots, \lambda_n(A)\}.$$

Le rayon spectral d'une matrice A carrée d'ordre n est défini par

$$\rho(A) = \max_i \{| \lambda_i(A) |\}.$$

On rappelle que pour toute valeur propre $\lambda \in sp(A)$, il existe au moins un vecteur $v \neq 0$ tel que $Av = \lambda v$ appelé vecteur propre.

THEOREME 1.1.1 *Soit A une matrice carrée d'ordre n, il existe une matrice unitaire U telle que U^*AU soit triangulaire. Si de plus les coefficients de la matrice A sont réels et ses valeurs propres sont réelles, alors, il existe une matrice orthogonale O telle que O^TAO soit triangulaire.*

DEMONSTRATION. Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps $\mathbb{C}$ et $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base de E orthonormée au sens du produit hermitien :

$$e_i^* e_j = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes, on peut toujours l'associer à une application linéaire $\mathcal{A} : E \to E$ relativement à la base $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ par l'image de la base :

$$\mathcal{A}(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i, \quad 1 \leq j \leq n$$

et si λ est une valeur propre de la matrice A, alors, il existe un vecteur non nul $v \in E$ tel que :

$$\mathcal{A}(v) = \lambda v$$

En utilisant l'application linéaire $\mathcal{A}$, la première partie du théorème consiste à prouver l'existence d'une nouvelle base orthonormée (au sens du produit hermitien) $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ telle que :

$$\forall 1 \leq j \leq n, \quad \mathcal{A}f_j \in < f_1, f_2, \cdots, f_j >$$

où, $< f_1, f_2, \cdots, f_j >$ représente le sous-espace de E engendré par les vecteurs $f_1, f_2, \cdots, f_j$ sur le corps $\mathbb{C}$. Ce qui prouve l'existence d'une matrice T triangulaire supérieure associée à l'application linéaire $\mathcal{A}$ relativement à la base $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$. D'autre part, la nouvelle base $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ est orthonormée au sens du produit hermitien, ce qui prouve que la matrice de passage, qu'on note U, est unitaire ($U^*U = I$) et on a : $T = U^*AU$.

Montrons par récurrence l'existence d'une base orthonormée $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ telle que :

$$\forall 1 \leq j \leq n, \quad \mathcal{A}f_j \in < f_1, f_2, \cdots, f_j >$$

Pour $n = 1$ le résultat est évident. Supposons qu'il est vrai jusqu'à l'odre m. Soit $\mathcal{A}$ est une application linéaire de $E \rightarrow E$ avec E espace vectoriel de dimension $n = m + 1$ sur le corps $\mathbb{C}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de la matrice associée à l'application linéaire $\mathcal{A}$ et $v_1 \in E$ un vecteur propre associé à λ, donc :

$$\mathcal{A}v_1 = \lambda v_1$$

Quitte à diviser par $v_1^* v_1$, on peut supposer que $v_1^* v_1 = 1$. Soit $v_2, v_3, \cdots, v_n$, $n - 1$ vecteurs de E tels que $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ soit une base orthonormée de E. Donc

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}v_1 & = & \lambda v_1 \\ \mathcal{A}v_2 & = & \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,2} v_k \\ & \vdots & \\ \mathcal{A}v_n & = & \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n} v_k \end{array}$$

Soit $\mathcal{B}$ l'application linéaire de l'espace vectoriel $F = < v_2, v_3, \cdots, v_n >$, sur le corps $\mathbb{C}$, dans lui même définie par :

$$\forall\ 2 \leq j \leq n, \quad \mathcal{B}v_j = \sum_{k=2}^{n} \alpha_{k,j} v_k$$

d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $\{f_2, f_3, \cdots, f_n\}$ de F telle que :

$$\forall\ 2 \leq j \leq n, \begin{cases} f_j & = & \sum_{i=2}^{n} \gamma_{i,j} v_i \\ \mathcal{B}f_j & \in & < f_2, f_3, \cdots, f_j > \end{cases}$$

On pose $f_1 = v_1$. Il est clair que $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ est une base orthonormée et on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}f_1 & = & \lambda f_1 \\ \mathcal{A}f_j & = & \sum_{i=2}^{n} \gamma_{i,j} \mathcal{A}v_i \\ & = & \sum_{i=2}^{n} \gamma_{i,j} (\alpha_{1,i} v_1 + \mathcal{B}v_i) \\ & = & (\sum_{i=2}^{n} \gamma_{i,j} \alpha_{1,i}) f_1 + \mathcal{B}f_j \\ & \in & < f_1, f_2, \cdots, f_j > \end{array}$$

ce qui termine la démonstration par récurrence. La même démotranstion reste valable si on remplace le corps $\mathbb{C}$ par le corps $\mathbb{R}$ et on suppose que les valeurs propres de $\mathcal{A}$ sont réelles ; dans ce cas tous les coefficients seront dans $\mathbb{R}$ ce qui démontre la deuxième partie du théorème.

COROLLAIRE 1.1.1 *1) Toute matrice normale est diagonalisable et admet une base orthonormée (pour le produit hermitien) de vecteurs propres. En particulier, les matrices unitaires, orthogonales, hermitiennes et symétriques sont diagonalisables.*

2) Les valeurs propres d'une matrice hermitienne ou symétrique sont réelles.

3) Toute matrice symétrique admet une base réelle orthonormée de vecteurs propres, c'est-à-dire il existe une matrice orthogonale O telle que $O^T AO$ soit diagonale.

DEMONSTRATION.

1/ D'après le théorème 1.1.1, il existe une matrice U unitaire telle que : $U^*AU = T = (t_{ij})$ = une matrice triangulaire. Si on note par $p_1, p_2, \cdots, p_n$, les colonnes de U, alors, $p_1^*, p_2^*, \cdots, p_n^*$ sont les lignes de U^*. Par conséquent, U est une matrice unitaire ($U^*U = I$) est équivalent à

$$\forall i = 1, n, \ \forall j = 1, n, \ (p_i)^*(p_j) = \delta_{ij}$$

On va démontrer que T est une matrice diagonale lorsque la matrice A est normale. Montrons d'abord que T est normale :

$$T^* = (U^*AU)^* = U^*A^*(U^*)^* = U^*A^*U$$

$$T^*T = U^*A^*UU^*AU = U^*A^*AU = U^*AA^*U = TT^*$$

ce qui prouve que T est normale. Pour démontrer que T est diagonale, on va comparer les coefficients de T^*T et TT^* d'indice 11 :

$$(T^*T)_{11} = \sum_{i=1}^{n} \overline{t_{i1}} t_{i1} = |t_{11}|^2$$

$$(TT^*)_{11} = \sum_{i=1}^{n} \overline{t_{1i}} t_{1i} = |t_{11}|^2 + |t_{12}|^2 + \cdots + |t_{1n}|^2$$

ce qui donne : $t_{12} = t_{13} = \cdots = t_{1n} = 0$. On refait la même chose avec les coefficients d'indice 22 pour démontrer que les coefficients de la deuxième ligne de T en dehors de la diagonale sont nuls, puis avec les coefficients d'indice 33, etc ...

2/ On a :

$$U^*AU = D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

comme A est hermitienne, alors :

$$\begin{aligned} D^* &= diag(\overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, \cdots, \overline{\lambda_n}) \\ &= (U^*AU)^* = U^*A^*U \\ &= U^*AU = D \\ &= diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \end{aligned}$$

c.q.f.d.

3/ On utilise la deuxième partie du théorème 1.1.1.

Exercice d'application :

a) Montrer que si une matrice carrée A est triangulaire et normale, alors, elle est diagonale.

b) Montrer les relations

(i) det(matrice triangulaire) $= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,

(ii) sp(matrice triangulaire) $= \{a_{ii},\ i = 1, n\}$,

(iii) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$, $tr(AB) = tr(BA)$, $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)$,

(iv) $det(A^T) = det(A) = \lambda_1(A)\lambda_2(A)\cdots\lambda_n(A)$, $det(AB) = det(BA)$,

(v) $sp(A^T) = sp(A)$, $sp(AB) = sp(BA)$,

(vi) $k \in \mathbb{N}$, $sp(A^k) = \{(\lambda_i(A))^k,\ i = 1, n\}$, (utiliser le théorème 1.1.1).

Réponse :

a) Voir la démonstration du corollaire 1.1.1.

b)(i) Supposons que $A = (a_{ij})$ est une matrice triangulaire supérieure, c'est à dire : $a_{ij} = 0$ pour $i > j$, (même raisonnement dans le cas triangulaire inférieure, en utilisant (iv)). Soit σ une permutation. Si le produit $a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}$ est non nul, alors, nécéssairement $\sigma(i) \leq i$ pour tout $i = 1, n$. D'où :

$$\begin{array}{ll}
\sigma(1) \leq 1 & \Rightarrow \sigma(1) = 1 \\
\sigma(2) \neq \sigma(1) = 1;\ \sigma(2) \leq 2 & \Rightarrow \sigma(2) = 2 \\
 & \vdots \\
\sigma(n) \neq \sigma(i) = i, 1 \leq i \leq n-1;\ \sigma(n) \leq n & \Rightarrow \sigma(n) = n
\end{array}$$

donc, toutes les permutations donnent un produit nul, sauf peut-être l'identité. Ce qui donne :

$$det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(ii) Si A est une matrice triangulaire, alors, $A - xI$ est aussi triangulaire et les coefficients de la diagonale sont : $a_{ii} - x$, $i = 1, n$. D'après (i), le polynôme caractéristique de A est égal à :

$$P_A(x) = (a_{11} - x)(a_{22} - x)\cdots(a_{nn} - x)$$

c.q.f.d.

(iii)(iv)(v) $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $AB = (c_{ij})$, $BA = (d_{ij})$, par définition du produit de deux matrices, on a :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$$

d'où

$$\begin{aligned}
tr(A+B) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ii} + \sum_{k=1}^{n} b_{ii} \\
&= tr(A) + tr(B)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
tr(AB) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} c_{ii} \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} d_{kk} \\
&= tr(BA)
\end{aligned}$$

D'après le théorème 1.1.1, toute matrice est semblable à une matrice triangulaire T. D'après (ii), les valeurs propres d'une matrice triangulaire T sont les coefficients de la diagonale de T. Montrons que deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres : soit $\lambda \in sp(P^{-1}AP)$, par définition, il existe $v \neq 0$ tel que $P^{-1}APv = \lambda v$, d'où $APv = \lambda Pv$ et comme P est inversible, alors $Pv \neq 0$, par suite Pv est un vecteur propre de A associé à λ, ce qui montre que $\lambda \in sp(A)$. De la même manière, on montre que les valeurs propres de A sont des valeurs propres de $P^{-1}AP$. Donc, la matrice A et la matrice triangulaire associée à A par le théorème 1.1.1 ont le même polynôme caractéristique puisqu'elles ont les mêmes valeurs propres. D'autre part, un calcul simple nous montre que :

$$P_B(x) = det(B - xI) = (-1)^n[x^n - tr(B)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n det(B)]$$

ce qui montre que $tr(A) = tr(T)$ et $det(A) = det(T)$, soit encore :

$$\begin{aligned} tr(A) &= \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i(A) \\ det(A) &= \textstyle\prod_{i=1}^n \lambda_i(A) \end{aligned}$$

Montrons que : $det(A) = det(A^T)$. Il suffit de remarquer que si une matrice B est semblable à une matrice C , alors, B^T est semblable à C^T . Donc, A^T est semblable à T^T qui est une matrice triangulaire inférieure (ses valeurs propres sont sur sa diagonale, même raisonnement que le cas d'une matrice triangulaire supérieure). Or, la diagonale de T est la même que la diagonale de T^T , donc. T et T^T ont les mêmes valeurs propres. Par conséquent, A^T et A ont les mêmes valeurs propres. Ce qui prouve que : $det(A) = det(A^T)$ et $sp(A) = sp(A^T)$. Montrons que : $sp(AB) = sp(BA)$ (ce qui prouve en particulier que $det(AB) = det(BA)$). Il suffit de prouver que $sp(AB) \subset sp(BA)$ et par symétrie on a l'autre inclusion. Soit $\lambda \in sp(AB)$, alors il existe $v \neq 0$ tel que $ABv = \lambda v$:

1. Si $Bv \neq 0$, alors, $BA(Bv) = \lambda Bv$ (on applique B de deux côtés) d'où Bv est un vecteur propre de BA associé à la valeur propre λ , ce qui montre que $\lambda \in sp(BA)$.
2. Si $Bv = 0$, alors nécéssairement $\lambda = 0$. D'autre part, si A est inversible, il existe $w \neq 0$ tel que $Aw = v$, sinon, il existe $w \neq 0$ tel que $Aw = 0$. Dans les deux cas $BAw = 0$, ce qui montre que w est un vecteur propre de BA associé à la valeur propre $\lambda = 0$, d'où $\lambda = 0 \in sp(BA)$.

(vi) On vérifie facilement que si B est semblable à C alors B^k est semblable à C^k, $k \in \mathbb{N}$. D'où, A^k est semblable à T^k (T est la matrice triangulaire donnée par le théorème 1.1.1). Un calcul simple nous montre que T^k, $k \in \mathbb{N}$, est aussi triangulaire supérieure et les coefficients de sa diagonale sont les t_{ii}^k, $i = 1, n$.

REMARQUE 1.1.1 *D'après le corollaire 1.1.1, si A est une matrice hermitienne, il existe une matrice unitaire $P = U^* = U^{-1}$ telle que :*

$$A = P^*\ diag(\lambda_i)\ P$$

d'où, pour tout $v \in V$:

$$v^*Av = v^*P^*\ diag(\lambda_i)\ Pv = (Pv)^*\ diag(\lambda_i)\ (Pv) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\tilde{v}_i|^2$$

avec $\tilde{v}_i$ la ième composante du vecteur Pv, d'où :

$$\lambda_{max}||Pv||_2^2 = \lambda_{max}\sum_{i=1}^{n}|\tilde{v}_i|^2 \geq v^*Av \geq \lambda_{min}||Pv||_2^2 = \lambda_{min}\sum_{i=1}^{n}|\tilde{v}_i|^2$$

avec λ_{max} la plus grande valeur propre de A et λ_{min} la plus petite valeur propre de A. D'autre part, la matrice P est unitaire ce qui donne $||Pv||_2 = ||v||_2$, d'où :

$$\lambda_{max}||v||_2^2 = \lambda_{max}\sum_{i=1}^{n}|v_i|^2 \geq v^*Av \geq \lambda_{min}||v||_2^2 = \lambda_{min}\sum_{i=1}^{n}|v_i|^2$$

ce qui prouve en particulier que :

$$\lambda_{max} = \max_{||u||_2=1} u^*Au;\ \lambda_{min} = \min_{||u||_2=1} u^*Au$$

Le maximum est atteint pour un vecteur propre de A associé à λ_{max} de norme 2 égale à 1 et le minimum est atteint pour un vecteur propre de A associé à λ_{min} de norme 2 égale à 1.

DEFINITION et REMARQUE

On dit qu'une matrice hermitienne est définie positive (resp. positive) si :

$$v^*Av > 0, \forall v \in V - \{0\}, \qquad (resp. v^*Av \geq 0, \forall v \in V)\ ;$$

d'après ce qui précède, on a

$$v^*Av \geq \lambda_{min}v^*v, \text{ pour tout } v \in V\ ;$$

d'où, une matrice hermitienne est définie positive (resp. positive) si et seulement si $\lambda_{min} > 0$ (resp.$\lambda_{min} \geq 0$).

1.2 Normes et suites de matrices

Soit V un espace vectoriel de dimension finie. On rappelle les trois normes vectorielles suivantes :

$$\begin{aligned} \| v \|_1 &= \sum_i | v_i | \\ \| v \|_2 &= (\sum_i | v_i |^2)^{1/2} \\ \| v \|_\infty &= \max_i | v_i | \end{aligned}$$

DEFINITION 1.2.1 *Une norme matricielle, notée comme la norme vectorielle par $\| . \|$, est par définition une norme vectorielle :*

(i) $\| A \| \geq 0$ *et* $\| A \| = 0 \Longleftrightarrow A = 0$,

(ii) $\| \gamma A \| = | \gamma | \| A \|$ *pour tout scalaire* γ,

(iii) $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$,

de plus elle vérifie :

(iv) $\| AB \| \leq \| A \| \| B \|$.

Etant donné une norme vectorielle $\| \,.\, \|$, on lui associe une norme matricielle, appelée norme matricielle subordonnée, de la manière suivante :

$$\| A \| = \max_{x \neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|}$$

(noter que les normes à droite sont vectorielles).

Exercice d'application : Vérifier que
(i) la norme subordonnée est bien une norme matricielle,
(ii) $\| A \| = \max_{x \neq 0} \dfrac{\| Ax \|}{\| x \|} = \max_{\|u\|=1} \| Au \|$

Réponse :

1. (a)

$$\begin{aligned} \|A\| = 0 \quad & \Longleftrightarrow \sup_{x\neq 0} \tfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0 \quad && \Longleftrightarrow \forall x \neq 0, \tfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0 \\ & \Longleftrightarrow \forall x, \|Ax\| = 0 && \Longleftrightarrow A = 0 \end{aligned}$$

(b) $\|\lambda A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\lambda Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0} \frac{|\lambda|\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda|\|A\|$

(c) A et B deux matrices de même ordre :

$$\begin{aligned} \forall x \neq 0, \tfrac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} & = \tfrac{\|Ax+Bx\|}{\|x\|} & \leq \tfrac{\|Ax\|+\|Bx\|}{\|x\|} \\ & \leq \tfrac{\|Ax\|}{\|x\|} + \tfrac{\|Bx\|}{\|x\|} & \leq \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

d'où : $\|A+B\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq \|A\| + \|B\|$.

(d) De la définition de $\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, on déduit que : $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$ pour tout x. Soient A et B deux matrices de même ordre, on a :

$$\forall x \neq 0, \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \frac{\|A(Bx)\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|\|Bx\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|\|B\|\|x\|}{\|x\|} = \|A\|\|B\|$$

ce qui prouve que : $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

2.

$$\begin{aligned} \|A\| & = \sup_{x\neq 0} \tfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0} \|A(\tfrac{x}{\|x\|})\| \\ & \leq \sup_{\|u\|=1} \|Au\| = \sup_{\|u\|=1} \tfrac{\|Au\|}{\|u\|} \\ & \leq \sup_{u\neq 0} \tfrac{\|Au\|}{\|u\|} = \|A\| \end{aligned}$$

Les normes matricielles subordonnées aux normes $\| \,.\, \|_1$, $\| \,.\, \|_2$ et $\| \,.\, \|_\infty$ sont données par le théorème suivant :

THEOREME 1.2.1 **(1)** $\| A \|_1 = \max\limits_j \| a_j \|_1$, *(a_j : jème colonne de A),*

(2) $\| A \|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$,

(3) $\| A \|_\infty = \max\limits_i \| a'_i \|_1$, *(a'_i : ième ligne de A),*

DEMONSTRATION.

(1) $u \in \mathbb{R}^n$, $\| u \|_1 = 1$, alors :

$$\begin{aligned}
\| Au \|_1 &= \sum_{k=1,n} | \sum_{j=1,n} a_{k,j} u_j | \\
&\leq \sum_{k=1,n} \sum_{j=1,n} | a_{k,j} u_j | \\
&\leq \sum_{j=1,n} (\sum_{k=1,n} | a_{k,j} |) | u_j | \\
&\leq \max_j (\sum_{k=1,n} | a_{k,j} |) \sum_{j=1,n} | u_j |
\end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\| A \|_1 \leq \max_j \| a_j \|_1$$

D'autre part, soit j_0 tel que :

$$\max_j \| a_j \|_1 = \| a_{j_0} \|_1$$

on pose

$$v_{j_0} = 1, \quad v_j = 0, \quad \forall j \neq j_0$$

on obtient que $\| v \|_1 = 1$ et $\| Av \|_1 = \max_j \| a_j \|_1 \leq \| A \|_1$, d'où l'autre inégalité.

(2)

$$\begin{aligned}
\| A \|_2 &= \max_{\|u\|_2=1} \| Au \|_2 \\
&= \max_{\|u\|_2=1} \sqrt{u^* A^* Au} \\
&= \sqrt{\rho(A^* A)}
\end{aligned}$$

car la matrice $A^* A$ est hermitienne positive (voir remarque 1.1.1).

(3) $u \in \mathbb{R}^n$, $\| u \|_\infty = 1$, alors :

$$\begin{aligned}
\| Au \|_\infty &= \max_k | \sum_{j=1,n} a_{k,j} u_j | \\
&\leq \max_k \sum_{j=1,n} | a_{k,j} u_j | \\
&\leq \| u \|_\infty \max_k (\sum_{j=1,n} | a_{k,j} |)
\end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\| A \|_\infty \leq \max_k \| a'_k \|_1$$

D'autre part, soit k_0 tel que :

$$\max_k \| a'_k \|_1 = \| a'_{k_0} \|_1$$

on pose

$$\forall j, \quad v_j = \begin{cases} signe(a_{k_0,j}) & , \quad \text{si } a_{k_0,j} \neq 0, \\ 0 & , \quad \text{sinon} \end{cases}$$

on obtient que $\| v \|_\infty = 1$ et $\| Av \|_\infty = \max_k \| a'_k \|_1 \leq \| A \|_\infty$, d'où l'autre inégalité.

On vérifie sans peine que la norme matricielle subordonnée à la norme 2 d'une matrice normale est égale à son rayon spectral (Indication : utiliser le corollaire 1.1.1 et le fait que la norme 2 est invariante par transformation unitaire). Une question s'impose, le rayon spectral définit-il une norme matricielle ? La réponse est donnée par l'exemple suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a que A est une matrice non nulle et son rayon spectral est nul.

Le théorème suivant compare le rayon spectral et une norme matricielle quelconque,

THEOREME 1.2.2 *(1) Soit A une matrice quelconque et $\| \cdot \|$ une norme matricielle quelconque. Alors*

$$\rho(A) \leq \| A \| .$$

(2) Etant donné une matrice A et $\varepsilon > 0$, il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que

$$\| A \| \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

DEMONSTRATION.

(1) Soit λ une valeur propre de A telle que $\rho(A) = |\lambda|$. Soit $v \neq 0$ un vecteur propre de A associé à λ. Soit B la matrice carrée d'ordre n définie par :

$$Bx = (v^* x)v, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$$

On a :

$$\| AB \| \leq \| A \| \| B \|, \text{ et } \| B \| \neq 0$$

D'autre part

$$ABx = A(v^* x)v = (v^* x)\lambda v, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$$

par conséquent $AB = \lambda B$, d'où $\| AB \| = |\lambda| \| B \|$. Comme $\| B \| \neq 0$, alors

$$\rho(A) = |\lambda| \leq \| A \|$$

(2) D'après le théorème 1.1.1, il existe une matrice unitaire U telle que :

$$T = U^{-1} A U$$

est une matrice triangulaire supérieure :

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & \cdots & t_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

avec $sp(A) = \{t_{11}, t_{22}, t_{33}, \cdots, t_{nn}\}$. Soit $\delta > 0$, on pose :

$$P_\delta = diag\{1, \delta, \delta^2, \cdots, \delta^{n-1}\}$$

On vérifie facilement que

$$\lim_{\delta \to 0} P_\delta^{-1} T P_\delta = diag\{t_{11}, t_{22}, \cdots, t_{nn}\}$$

d'où

$$\lim_{\delta \to 0} \| P_\delta^{-1} U^{-1} A U P_\delta \|_2 = \| diag\{t_{11}, t_{22}, \cdots, t_{nn}\} \|_2 = \rho(A)$$

Soit $\varepsilon > 0$, on choisit $\delta > 0$ tel que :

$$\| P_\delta^{-1} U^{-1} A U P_\delta \|_2 \leq \rho(A) + \varepsilon$$

et on définit l'application de l'espace des matrices carrées d'ordre n dans $\mathbb{R}^+$

$$B \to \| B \| = \| P_\delta^{-1} U^{-1} B U P_\delta \|_2$$

on vérifie facilement que $\| \, . \, \|$ est une norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle suivante :

$$v \to \| v \| = \| P_\delta^{-1} U^{-1} v \|_2$$

La notion de convergence d'une suite de matrices n'est autre que la notion classique de convergence dans les espaces vectoriels normés.

THEOREME 1.2.3 *Soit B une matrice carrée. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\lim_{k \to \infty} B^k = 0$,

(2) $\lim_{k \to \infty} B^k v = 0$, *pour tout vecteur v,*

(3) $\rho(B) < 1$,

(4) $\| B \| < 1$ *pour au moins une norme matricielle subordonnée.*

DEMONSTRATION.

(1) $\Longrightarrow$ (2) évidente.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Soit λ une valeur propre de B telle que $\rho(B) = | \lambda |$. Soit $v \neq 0$ un vecteur propre de B associé à λ. On a :

$$B^k v = \lambda^k v$$

d'où

$$\| B^k v \| = (\rho(B))^k \| v \|$$

ce qui prouve que $\lim_{k \to \infty} \rho(B)^k = 0$ car $\| v \| \neq 0$, d'où, $\rho(B) < 1$.

(3) $\Longrightarrow$ (4) on applique (2) du théorème 1.2.2 avec $\varepsilon = \frac{1-\rho(B)}{2}$.

(4) $\Longrightarrow$ (1) évidente en utilisant la propriété de la norme matricielle suivante :

$$\| B^k \| \leq \| B \|^k$$

THEOREME 1.2.4 *Soit B une matrice carrée, et $\| \, . \, \|$ une norme matricielle quelconque. Alors*

$$\lim_{k \to \infty} \| B^k \|^{1/k} = \rho(B).$$

DEMONSTRATION.

En utilisant le théorème 1.1.1, on vérifie facilement que :

$$sp(B^k) = \{\lambda^k : \lambda \in sp(B)\}$$

d'où

$$\rho(B^k) = (\rho(B))^k$$

d'après le théorème 1.2.2, on a :

$$\rho(B^k) \leq \| B^k \|$$

d'où

$$\rho(B) \leq \| B^k \|^{1/k}$$

Soit $\varepsilon > 0$, d'après (2) du théorème 1.2.2, il existe une norme matricielle $\| \, . \, \|_\varepsilon$ telle que :

$$\| B \|_\varepsilon \leq \rho(B) + \varepsilon$$

D'autre part, toutes les normes sont équivalentes car l'espace vectoriel des matrices est un espace vectoriel de dimension finie et la norme matricielle et en particulier une norme vectorielle, donc :

$$\exists c_\varepsilon > 0 \; : \; \| A \| \leq c_\varepsilon \| A \|_\varepsilon, \; \forall A$$

Par conséquent :

$$\rho(B) \leq \| B^k \|^{1/k} \leq c_\varepsilon^{1/k} \| B^k \|_\varepsilon^{1/k} \leq c_\varepsilon^{1/k}(\rho(B) + \varepsilon)$$

Par passage à la limite sur k puis sur ε, on obtient ce qu'il faut.

Une importante norme matricielle non subordonnée à une norme vectorielle est la norme de *Frobenius* définie pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ par :

$$\| A \|_F = (\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2)^{1/2},$$

on vérifie que

$$\| A \|_F^2 = trace(A^* A)$$

ce qui prouve que la norme de *Frobenius* est invariante par transformation unitaire. La norme de *Frobenius* est essentiellement la norme Euclidienne appliquée à un vecteur de mn composantes. Il est facile de voir que la norme de l'identité I est toujours égale à 1 pour une norme subordonnée. D'autre part, il est clair que $\| I \|_F = \sqrt{n}$. D'où, pour $n \geq 2$, la norme de *Frobenius* ne peut pas être subordonnée à une norme vectorielle.

1.3 Méthode de Gauss pour la résolution des systèmes linéaires

L'idée de base derrière les méthodes de résolution de $Ax = b$ est la transformation de ce problème en un problème facile à résoudre. Considérons l'exemple d'un système en trois dimensions :

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 6 \end{array},$$

ce qui corresponds à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

L'inconnu x_1 peut-être éliminer de la deuxième équation et de la troisième équation en retranchant de la deuxième équation deux fois la première équation et de la troisième équation trois fois la première équation, on obtient alors, le système suivant

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ & & x_2 & - & 3x_3 & = & -4 \\ & - & 4x_2 & - & 7x_3 & = & -3 \end{array}.$$

(Il est clair que ces transformations ne changent pas la solution.)

L'inconnu x_2 peut-être éliminer de la troisième équation du système en ajoutant à la dernière équation quatre fois la deuxième équation, on obtient, le système triangulaire suivant :

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ & & x_2 & - & 3x_3 & = & -4 \\ & & & - & 19x_3 & = & -19 \end{array}.$$

La solution de notre système de départ peut-être déterminée directement à partir des équations du dernier système. Dans la dernière équation il y a seulement x_3, et on a $x_3 = 1$. En remplaçant x_3 par sa valeur dans la deuxième équation, on obtient

$$x_2 = -1.$$

Enfin, en remplaçant x_3 et x_2 dans la première équation, on obtient

$$x_1 = 2$$

soit

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc transformé notre système en un système qui a la même solution et qui est facile à résoudre, c'est le système triangulaire.

1.3.1 Système linéaire triangulaire. Méthode de remontée.

Supposons que nous voulons résoudre

$$Ux = b,$$

où U est une matrice triangulaire supérieure $n \times n$ inversible. On a alors, n équations sous la forme :

$$\begin{array}{ccccccccc} u_{11}x_1 & + & u_{12}x_2 & + & \cdots & + & u_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & u_{22}x_2 & + & \cdots & + & u_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & u_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

(La matrice U est inversible si et seulement si les éléments de la diagonale sont non nuls.)

La n^{eme} équation dépend uniquement de l'inconnu x_n, on a

$$u_{nn}x_n = b_n, \text{ soit } x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}.$$

La $(n-1)^{eme}$ équation

$$u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n = b_{n-1}$$

dépend uniquement de x_n et x_{n-1}, or, x_n est connu, d'où

$$x_{n-1} = \frac{1}{u_{n-1,n-1}}(b_{n-1} - u_{n-1,n}x_n).$$

Pour $k > 0$, x_k est déterminé de la même manière que les inconnus

$$x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{k+1}$$

par

$$x_k = \frac{1}{u_{kk}}(b_k - u_{k,k+1}x_{k+1} - u_{k,k+2}x_{k+2} - \cdots - u_{k,n}x_n).$$

Pour tout $k = 1, \cdots, n$, le calcul de x_k nécessite une division, $n-k$ additions et $n-k$ multiplications. D'où, le nombre nécessaire d'opérations élémentaires pour résoudre par la méthode de remontée un système triangulaire est :

n divisions
$(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2} \approx \frac{n^2}{2}$ additions
$(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2} \approx \frac{n^2}{2}$ multiplications

Dans le cas d'un système linéaire triangulaire inférieure

$$Lx = b,$$

on utilise les mêmes techniques de la méthode de remontée, au lieu de commencer par l'inconnu x_n et on monte à x_1, on commence par x_1 puis on descend à x_n. On appelle cette procédure la méthode de descente.

Exercice d'application

Montrer en utilisant la méthode de remontée que l'inverse d'une matrice triangulaire $T = (t_{ij})$ inversible est une matrice triangulaire de même nature. De plus, les éléments de la diagonale de la matrice inverse sont les inverses des éléments de la diagonale de la matrice T. (Indication : la jième colonne de la matrice T^{-1} est égale à la solution du système triangulaire $Tx = e_j$ avec e_j est le jième vecteur de la base canonique.)

1.3.2 La méthode d'élimination de Gauss

La résolution d'un système linéaire triangulaire est facile. Exactement comme le travail à la main de l'exemple, on va transformer le système linéaire $Ax = b$ en un système linéaire triangulaire ayant la même solution.

Soit A une matrice carrée d'ordre n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix}$$

où $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq i, j \leq n$ et a'_i représente la i^{eme} ligne de la matrice A, $1 \leq i \leq n$.

La première étape de la résolution de $Ax = b$ consiste à éliminer x_1 de toutes les équations sauf la première. Dans le cas où $a_{11} \neq 0$, on applique la technique de l'exemple, c'est à dire :

$$\begin{array}{c} \textit{la ligne } a'_2 \textit{ est remplacée par } a'_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} a'_1 \\ \textit{la ligne } a'_3 \textit{ est remplacée par } a'_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} a'_1 \\ \vdots \\ \textit{la ligne } a'_n \textit{ est remplacée par } a'_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}} a'_1 \end{array},$$

de même pour le vecteur b :

$$\begin{array}{c} \textit{la composante } b_2 \textit{ est remplacée par } b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 \\ \textit{la composante } b_3 \textit{ est remplacée par } b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} b_1 \\ \vdots \\ \textit{la composante } b_n \textit{ est remplacée par } b_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}} b_1 \end{array}$$

L'élément a_{11} s'appelle le pivot. Si $a_{11} = 0$, on cherche un coefficient non nul a_{i1}, $i = 2, \cdots, n$, (un tel coefficient existe, sinon la matrice est non inversible) et on permute la ligne i avec la première ligne pour que le nouveau pivot qui est le coefficient à la position 1, 1 soit non nul.

A l'étape k, la matrice $A^{(k)}$ a la forme suivante :

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2k}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a_2^{(2)'} \\ \vdots \\ a_k^{(k)'} \\ \vdots \\ a_n^{(k)'} \end{pmatrix}$$

L'étape k de la résolution consiste à éliminer l'inconnu x_k de toutes les équations sauf les k-premières. De la même manière que la première étape, si le pivot

$a_{kk}^{(k)} \neq 0$, on fait les transformations suivantes :

$$\textit{la ligne } a_{k+1}^{(k)\,\prime} \textit{ est remplacée par } a_{k+1}^{(k)\,\prime} - \frac{a_{k+1k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_k^{(k)\prime}$$
$$\textit{la ligne } a_{k+2}^{(k)\,\prime} \textit{ est remplacée par } a_{k+2}^{(k)\,\prime} - \frac{a_{k+2k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_k^{(k)\prime}$$
$$\vdots$$
$$\textit{la ligne } a_n^{(k)\prime} \textit{ est remplacée par } a_n^{(k)\prime} - \frac{a_{nk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_k^{(k)\prime}$$

de même pour le vecteur $b^{(k)}$

$$\textit{la composante } b_{k+1}^{(k)} \textit{ est remplacée par } b_{k+1}^{(k)} - \frac{a_{k+1k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)}$$
$$\textit{la composante } b_{k+2}^{(k)} \textit{ est remplacée par } b_{k+2}^{(k)} - \frac{a_{k+2k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)}$$
$$\vdots$$
$$\textit{la composante } b_n^{(k)} \textit{ est remplacée par } b_n^{(k)} - \frac{a_{nk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)}$$

Si le coefficient $a_{kk}^{(k)} = 0$, on cherche un coefficient $a_{ik}^{(k)} \neq 0$, $i = k+1, \cdots, n$, (un tel coefficient existe sinon la matrice est non inversible) et on permute la ligne i avec la ligne k pour que le nouveau pivot qui est le coefficient à la position kk soit non nul.

Au bout de $n-1$ étapes, on obtient un système triangulaire.

1.4 Calcul de l'inverse d'une matrice

Dans la pratique, on évite le calcul de l'inverse A^{-1} d'une matrice inversible A. Dans le cas particulier où on a vraiment besoin de l'expression de la matrice A^{-1}, on utilise l'algorithme de Gauss Jordan. Le principe de la méthode de Gauss-Jordan est le même que celui de la méthode de Gauss. On initialise une matrice B à l'identité, cette matrice va jouer le rôle du second membre de la méthode de Gauss.

La première étape de la méthode de Gauss-Jordan est la même que celle de la méthode de Gauss, de plus, on applique les memes transformations à la matrice B. Supposons que le résultat de la $(k-1)$-ème étape est :

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & & & a_{1k}^{(k)} & \cdots & a_{1n}^{(k)} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & a_{k-1,k-1}^{(k)} & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad B^{(k)} = \begin{pmatrix} b_{11}^{(k)} & b_{12}^{(k)} & \cdots & b_{1n}^{(k)} \\ b_{21}^{(k)} & b_{22}^{(k)} & \cdots & b_{2n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1}^{(k)} & b_{n2}^{(k)} & \cdots & b_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

On cherche un pivot non nul (par exemple par la stratégie du pivot partiel) :

$$a_{lk}^{(k)} \quad / \quad |\, a_{lk}^{(k)} \,| = \sup_{k \leq i \leq n} |\, a_{ik}^{(k)} \,| .$$

Si $k \neq l$, on échange la ligne k avec la ligne l dans les deux matrices $A^{(k)}$ et $B^{(k)}$. On notera encore par $A^{(k)}$ la matrice obtenue après permutation de la matrice $A^{(k)}$. Puis, on fait l'élimination dans les deux matrices $A^{(k)}$ et $B^{(k)}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&(la\ ligne\ i)\ \ est\ remplacée\ par\\
&\qquad \{(la\ ligne\ i) - \tfrac{x_i}{pivot}(la\ ligne\ de\ pivot)\}\\
&x_i = \text{ le coefficient à la position } (i,k) \text{ de la matrice } A^{(k)}
\end{aligned}$$

avec i allant de 1 à $k-1$ et de $k+1$ à n. Au bout de n étapes, on obtient :

$$A^{(n)} = diag(a_{kk}^{(n)}) \qquad B^{(n)}$$

Pour finir, on divise les lignes de $k = 1, \cdots, n$, par $a_{kk}^{(n)}$, on obtient alors : à gauche la matrice identité et à droite la matrice A^{-1}.

1.5 Conditionnement d'un système linéaire

Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On considère le système linéaire

$$Au = b,$$

de solution exacte et unique $u = A^{-1}b$.

Dans un premier cas, supposons que le second membre du système $Au = b$ est perturbé en $b + \delta b$ et A restant inchangée. Soit $u + \delta u$ la solution exacte du système perturbé

$$A(u + \delta u) = b + \delta b.$$

Comme $Au = b$, la relation précédente implique que $A\delta u = \delta b$, d'où

$$\delta u = A^{-1}\delta b.$$

Utilisant une norme subordonnée, nous obtenons une majoration de $\| \delta u \|$:

$$\| \delta u \| \leq \| A^{-1} \| \| \delta b \| .$$

La relation précédente montre que la norme de la perturbation de la solution exacte du système $Au = b$ due à une perturbation du second membre δb est au plus égale à $\| A^{-1} \|$ multipliée par $\| \delta b \|$. D'autre part, la relation $Au = b$ implique que

$$\| b \| \leq \| A \| \| u \| .$$

Combinons les deux inégalités précédentes, nous obtenons l'inégalité importante suivante :

$$\frac{\| \delta u \|}{\| u \|} \leq \| A \| \| A^{-1} \| \frac{\| \delta b \|}{\| b \|}.$$

Par conséquent, le rapport d'amplification des erreurs relatives est au plus égal à $\| A \| \| A^{-1} \|$.

EXEMPLE

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix},$$

elle est symétrique, son déterminant vaut 1 et sa matrice inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

On considère le système linéaire

$$Au = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}, \text{ de solution } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et on considère le système perturbé, où le second membre est légèrement modifié, la matrice A restant inchangée :

$$A(u + \delta u) = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix}, \text{ de solution } \begin{pmatrix} 9.2 \\ -12.6 \\ 4.5 \\ -1.1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne un rapport d'amplification des erreurs relatives de l'ordre de 2000 (avec $\| \cdot \|_1$). Théoriquement, on obtient avec la même norme un maximum pour le rapport d'amplification égale à

$$\| A \|_1 \| A^{-1} \|_1 = 136 \times 33 = 4488.$$

Maintenant, nous perturbons la matrice A et nous laissons b fixe. Soit $u + \Delta u$ la solution exacte du système perturbé :

$$(A + \Delta A)(u + \Delta u) = b.$$

On suppose que ΔA est assez petit pour que la matrice perturbée reste inversible. De la même manière que le premier cas on montre l'inégalité suivante :

$$\frac{\| \Delta u \|}{\| u + \Delta u \|} \leq \| A \| \| A^{-1} \| \frac{\| \Delta A \|}{\| A \|}.$$

La quantité $\| A \| \| A^{-1} \|$ apparait à nouveau pour contrôler l'amplification des erreurs relatives.

EXEMPLE

Considérons le même système que l'exemple précédent où, cette fois on perturbe la matrice A

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8,1 & 7,2 \\ 7,08 & 5,04 & 6 & 5 \\ 8 & 5,98 & 9,89 & 9 \\ 6,99 & 4,99 & 9 & 9,98 \end{pmatrix} (u + \Delta u) = b, \text{ de solution } \begin{pmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Nous définissons le nombre conditionnement de la matrice inversible A par :

$$cond(A) = \| A \| \| A^{-1} \| .$$

Pour n'importe quelle norme matricielle subordonnée, la norme de la matrice identité I est égale à un. D'autre part, $I = AA^{-1}$ et $\| AA^{-1} \| \leq \| A \| \| A^{-1} \|$, ce qui montre que $cond(A) \geq 1$. On dit qu'un système est bien conditionné si le conditionnement de sa matrice est de l'ordre de 1 et il est mal conditionné si le conditionnement de sa matrice est très grand par rapport à 1.

1.6 Exercices : chapitre 1

Exercice 1

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $rang(A) = 1$ alors il existe $u, v \in \mathbb{R}^n$ tels que $A = uv^T$.
2. On considère la matrice élémentaire

$$E = I_n - \alpha\, uv^T$$

   (a) Montrer que E est inversible si et seulement si $\alpha\, u^T v \neq 1$.

   (b) On suppose que $\alpha\, u^T v \neq 1$, montrer que

$$E^{-1} = I_n - \beta\, uv^T \quad \text{où} \quad \beta = \frac{\alpha}{\alpha\, u^T v - 1}.$$

   (c) Déterminer les valeurs propres de E.

   (d) En déduire que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible et $u \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\det(M + uu^T) = (1 + u^T M^{-1} u) \det M.$$

Exercice 2

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère la matrice tridiagonale suivante :

$$A(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Jusqu'à la troisième question, on supposera que $a = 0$ et $b = 1$.

1. Vérifier que : $u_k^T = (\sin(\frac{k\pi}{n+1}), \sin(\frac{2k\pi}{n+1}), \cdots, \sin(\frac{nk\pi}{n+1})), k = 1, \cdots, n$ sont des vecteurs propres de $A(0,1)$. Déduire le $sp(A(0,1))$.
2. En déduire le spectre de $A(a,b)$ et des vecteurs propres associés.

Exercice 3

Etant donné une norme vectorielle $\|.\|$, la norme matricielle subordonnée associée est définie par :

$$\|A\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$$

(Les normes à droite sont vectorielles).

Vérifier que

1. $\|A\| = \sup_{\|u\|\leq 1} \|Au\| = \sup_{\|u\|=1} \|Au\|$
2. $\|A\| = \inf\{k > 0; \|Au\| \leq k\|u\|, \forall u\}$

Exercice 4

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer les propriétés suivantes

1. La norme $\|.\|_2$ est invariante par transformation unitaire.
2. Si A est une matrice normale alors $\|A\|_2 = \rho(A)$.

Exercice 5

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne notée $\|.\|_2$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme induite (notée aussi $\|.\|_2$) et le conditionnement associé est noté $\mathrm{cond}_2(A)$.

Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si A est normale alors
$$cond_2(A) = \frac{\max_i |\lambda_i(A)|}{\min_i |\lambda_i(A)|}$$
où les nombres $\lambda_i(A)$ désignent les valeurs propres de A.
2. Montrer que $\mathrm{cond}_2(A) = 1$ si et seulement si $A = \alpha Q$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et Q est une matrice orthogonale.

Exercice 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & & \\ & 1 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

1. Soit $x = (x_1 \cdots x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ la solution du système linéaire $Ax = b$ où $b = (b_1 \cdots b_n)^T$ est un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Montrer que $x_k = \sum_{i=0}^{n-k}(-2)^i b_{k+i}, \quad k = 1, \ldots, n.$
   (b) En déduire A^{-1} et un vecteur $v \neq 0$ tel que $\|A^{-1}\|_\infty = \frac{\|A^{-1}v\|_\infty}{\|v\|_\infty}$.
   (c) Calculer $\mathrm{cond}_\infty(A)$ et $\mathrm{cond}_1(A)$.
2. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Calculer $\|A^{-1}e_n\|_2$. En déduire un minorant de $\|A^{-1}\|_2$.
   (b) Calculer $\|Ae_2\|_2$. En déduire que $\mathrm{cond}_2(A) > 2^n$.

Exercice 7

Résoudre, par la méthode de Gauss, le système linéaire $AX = b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 3 & -7 \\ 4 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 (Algorithme de la méthode de Gauss)

1. Ecrire un algorithme d'échange de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
2. Ecrire un algorithme de résolution de $Ax = b$ dans le cas où la matrice A est triangulaire.

3. Ecrire l'algorithme de la méthode de Gauss pour la résolution de $Ax = b$ (sans stratégie de pivot) ; puis avec pivot partiel.

Exercice 9 (Méthode de Gauss-Jordan)
Appliquer la méthode de Gauss-Jordan pour calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 10 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

1.7 Corrigé des exercices : chapitre 1

Réponse 1

1. Si $rang(A) = 1$, alors, il existe $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$, tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists \alpha_x \in \mathbb{R} / Ax = \alpha_x u$$

en particulier :

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \exists v_i \in \mathbb{R} / Ae_i = v_i u$$

où $(e_i)_{i=1,n}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. D'où, si on écrit $x = \sum_{i=0}^n x_i e_i$, on obtient :

$$\begin{aligned} Ax &= \textstyle\sum_{i=0}^n x_i Ae_i \\ &= (\textstyle\sum_{i=0}^n v_i x_i) u \\ &= (v^T x) u \\ &= (uv^T) x \end{aligned}$$

ce qui prouve que $A = uv^T$.

2. On remarque que pour $z \in \mathbb{R}^n$:

$$Ez = 0 \Longrightarrow z - \alpha(v^T z)u = 0 \Longrightarrow z \in < u >$$

d'où : $KerE \subset < u >=$ le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par u. On supposera que $u \neq 0$ et $v \neq 0$, sinon $E = I_n$.

(a) E inveresible $\Longleftrightarrow kerE = \{0\} \Longleftrightarrow Eu \neq 0$ (car $kerE \subset < u >$)
$\Longleftrightarrow Eu = (1 - \alpha(v^T u))u \neq 0 \Longleftrightarrow 1 - \alpha(v^T u) \neq 0$.

(b)

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^n, EE^{-1}x &= E(x - \beta(v^T x)u) \\ &= Ex - \beta(v^T x)Eu \\ &= x - \alpha(v^T x)u - \beta(v^T x)(u - \alpha(v^T u)u) \\ &= x - \alpha(v^T x)u - (v^T x)\beta(1 - \alpha(v^T u))u \\ &= x - \alpha(v^T x)u + \alpha(v^T x)u \\ &= x \end{aligned}$$

(c) Soit $V =< v >^\perp=$le sous-espace $\mathbb{R}^n$ orthogonal au sous-espace engendré par v. On a :

$$\forall x \in V, Ex = x$$

ce qui prouve que 1 est une valeur propre de multiplicité au moins $n - 1 = \dim V$. Si $\alpha(v^T u) \neq 0$, alors, la nième valeur propre est égale à $\lambda_n = 1 - \alpha(v^T u) \neq 1$, car $Eu = (1 - \alpha(v^T u))u$. Si $\alpha(v^T u) = 0$, alors :

$$Ex = \lambda_n x \Longrightarrow x - \alpha(v^T x)u = \lambda_n x \Longrightarrow (1 - \lambda_n)x = \alpha(v^T x)u$$

donc $\lambda_n = 1$ ou x est colinéaire à u. Comme $Eu = u$, alors $\lambda_n = 1$. Dans les deux cas $\lambda_n = 1 - \alpha(v^T u)$. D'où :

$$sp(E) = \{1, 1 - \alpha(v^T u)\}$$

(d) On écrit $M + uu^T = M(I_n - (-1)(M^{-1}u)u^T) = ME$, avec $\alpha = -1$ et $v = M^{-1}u$. On utilise les propriétés du déterminant :

$$\begin{aligned} \det(ME) &= \det(M)\det(E), \\ \det(E) &= \lambda_1 \times \lambda_2 \times \cdots \times \lambda_n \end{aligned}$$

où λ_i , $i = 1, n$, sont les valeurs propres de E. On obtient ce qu'il faut.

Réponse 2

1. Pour tout $k = 1, \cdots, n$, il faut vérifier que

$$u_k = (\sin(\frac{k\pi}{n+1}), \sin(\frac{2k\pi}{n+1}), \cdots, \sin(\frac{nk\pi}{n+1}))^T$$

est un vecteur propre de $A(0, 1)$. Donc, pour tout $j = 1, \cdots, n$, il faut calculer :

$$x_{j+1} + x_{j-1}$$

avec $x_j = \sin(\frac{jk\pi}{n+1})$.
En utilisant la relation trigonométrique :

$$\sin(a) + \sin(b) = 2\cos(\frac{a-b}{2})\sin(\frac{a+b}{2})$$

on obtient pour tout $j = 1, \cdots, n$:

$$\begin{aligned} x_{j+1} + x_{j-1} &= \sin(\tfrac{(j+1)k\pi}{n+1}) + \sin(\tfrac{(j-1)k\pi}{n+1}) \\ &= \sin(\tfrac{(j+1)k\pi}{n+1}) + \sin(\tfrac{(j-1)k\pi}{n+1}) \\ &= 2\cos(\tfrac{k\pi}{n+1})\sin(\tfrac{jk\pi}{n+1}) \\ &= 2\cos(\tfrac{k\pi}{n+1})x_j \end{aligned}$$

d'où, u_k est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_k = 2\cos(\frac{k\pi}{n+1})$.

2. On a $A(a, b) = aI_n + bA(0, 1)$. Si $b = 0$, $A(a, 0) = aI_n$ ce qui donne $sp(A(a, 0)) = \{a\}$. Supposons que $b \neq 0$, alors :
$\star$ $\lambda \in sp(A(a, b)) \Longrightarrow \exists v \neq 0 / A(a, b)v = \lambda v$
$\Longrightarrow A(0, 1)v = \frac{\lambda - a}{b} v \Longrightarrow \frac{\lambda - a}{b} \in sp(A(0, 1))$
$\star$ $\lambda \in sp(A(0, 1)) \Longrightarrow \exists v \neq 0 / A(0, 1)v = \lambda v$
$\Longrightarrow A(a, b)v = aI_n v + bA(0, 1)v = (a + b\lambda)v \Longrightarrow a + b\lambda \in sp(A(a, b))$
D'où, $sp(A(a, b)) = \{a + 2b\cos(\frac{k\pi}{n+1}), k = 1, \cdots, n\}$.

Réponse 3 Pour tout x , on a :$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$, d'où :

1.

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{x \neq 0} \tfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \|A(\tfrac{x}{\|x\|})\| \\ &\leq \sup_{\|u\|=1} \|Au\| \leq \sup_{\|u\| \leq 1} \|Au\| \\ &\leq \sup_{\|u\| \leq 1} \|A\|\|u\| = \|A\| \end{aligned}$$

2.

$$\inf\{k > 0 / \forall x, \|Ax\| \leq k\|x\|\} \leq \|A\|$$

Soit $k \in]0, +\infty[$ tel que pour tout x, on a : $\|Ax\| \leq k\|x\|$ alors :

$$\forall x \neq 0, \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq k$$

ce qui donne que : $\|A\| \leq k$. Donc :

$$\|A\| \leq \inf\{k > 0 / \forall x, \|Ax\| \leq k\|x\|\}$$

Réponse 4

1. Soient U et V deux matrices unitaires ($U^*U = UU^* = V^*V = VV^* = I_n$), alors :
$$\begin{aligned} \|U^*AV\|_2 &= \sqrt{\rho((U^*AV)^*(U^*AV))} \\ &= \sqrt{\rho(V^*A^*UU^*AV)} \\ &= \sqrt{\rho(V^*(A^*A)V)} \\ &= \sqrt{\rho(A^*A)} = \|A\|_2 \end{aligned}$$
car $V^*(A^*A)V$ et (A^*A) sont semblables et par conséquent elles ont les mêmes valeurs propres.
2. Si A est une matrice normale, alors A est diagonalisable : $D = diag(\lambda_i) = U^*AU$ avec U une matrice unitaire. D'où $D^*D = diag(|\lambda_i|^2) = U^*A^*AU$, ce qui prouve que :
$$\begin{aligned} \|A\|_2 &= \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(U^*A^*AU)} \\ &= \sqrt{\max_i |\lambda_i|^2} = \sqrt{(\max_i |\lambda_i|)^2} \\ &= \max_i |\lambda_i| = \rho(A) \end{aligned}$$

Réponse 5

1. Si A est une matrice normale, alors A est diagonalisable :
$$D = diag(\lambda_i) = U^*AU \text{ et } \|A\|_2 = \max_i |\lambda_i|$$
D'où
$$D^{-1} = diag(\frac{1}{\lambda_i}) = U^{-1}A^{-1}(U^*)^{-1} = U^*A^{-1}U$$
($U^{-1} = U^*$ et $(U^*)^{-1} = U$ car $U^*U = UU^* = I$), ce qui prouve :
$$\|A^{-1}\|_2 = \rho(A^{-1}) = \max_i \frac{1}{|\lambda_i|} = \frac{1}{\min_i |\lambda_i|}$$
car A^{-1} est aussi normale (pour le prouver, on utilise :
$(A^*A)^{-1} = A^{-1}(A^*)^{-1} = A^{-1}(A^{-1})^*$).
2. On a : $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)}$ (car $sp(AB) = sp(BA)$). D'où :
$$\begin{aligned} cond_2(A) &= \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 \\ &= \sqrt{\rho(A^*A)\rho((A^{-1})^*A^{-1})} \\ &= \sqrt{\rho(A^*A)\rho((A^*)^{-1}A^{-1})} \\ &= \sqrt{\rho(A^*A)\rho(A^{-1}(A^*)^{-1})} \\ &= \sqrt{\rho(A^*A)\rho((A^*A)^{-1})} \end{aligned}$$
or $\rho(B) = \max_i |\lambda_i(B)|$ et $\rho(B^{-1}) = \max_i |\lambda_i(B^{-1})| = \max_i \frac{1}{|\lambda_i(B)|} = \frac{1}{\min_i |\lambda_i(B)|}$, d'où :
$$1 = cond_2(A) = \sqrt{\frac{\max_i |\lambda_i(A^*A)|}{\min_i |\lambda_i(A^*A)|}}$$
ce qui donne $\max_i |\lambda_i(A^*A)|$=$\min_i |\lambda_i(A^*A)|$, or, la matrice A^*A est hermitienne définie positive ($x^*A^*Ax = (Ax)^*(Ax) = \|Ax\|_2^2 > 0$, pour $x \neq 0$), donc ses valeurs propres sont strictement positives, ce qui donne :
$$\lambda_1(A^*A) = \lambda_2(A^*A) = \cdots = \lambda_n(A^*A) = r > 0$$
Par conséquent : $A^*A = U^*(rI_n)U = rI_n$, d'où : $(\frac{1}{\sqrt{r}}A)^*(\frac{1}{\sqrt{r}}A) = I_n$. Ce qui prouve que $\frac{1}{\sqrt{r}}A = Q$ est une matrice unitaire. Comme A est réelle, alors, Q est réelle, d'où, Q est orthogonale.

Réponse 6

1. (a) La k-ème équation du système $Ax = b$, $k = 1, \cdots, n-1$, s'écrit :

$$x_k + 2x_{k+1} = b_k$$

et $x_n = b_n$. Par récurrence lorsque k décroît de n à 1. Pour $k = n$: $x_n = \sum_{i=0}^{0}(-2)^i b_{n+i} = b_n$. Supposons que :

$$x_{k+1} = \sum_{i=0}^{n-k-1} (-2)^i b_{k+1+i}$$

alors :

$$\begin{aligned} x_k = b_k - 2x_{k+1} &= b_k + \textstyle\sum_{i=0}^{n-k-1}(-2)^{i+1} b_{k+i+1} \\ &= b_k + \textstyle\sum_{j=1}^{n-k}(-2)^j b_{k+j} \\ &= \textstyle\sum_{j=0}^{n-k}(-2)^j b_{k+j} \end{aligned}$$

(b) Si on note par $A^{-1} = (\beta_{ij})$, alors, la l-ième colonne $(\beta_{1l}\ \beta_{2l}\ \cdots\ \beta_{nl})^T$ de A^{-1} est égale à $A^{-1}e_l$, donc c'est la solution du système : $Ax = e_l$. D'où, en remplaçant le vecteur b par le vecteur e_l dans la question précédente, on obtient :

$$x_k = \beta_{kl} = \sum_{i=0}^{n-k}(-2)^i b_{k+i} = \begin{cases} (-2)^{l-k} & k \le l \\ 0 & k > l \end{cases}$$

Ce qui prouve que :

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\|_\infty &= \max_k \textstyle\sum_{l=1}^{n} |\beta_{kl}| = \max_k \sum_{l=1}^{n} 2^{l-k} \\ &= (\textstyle\sum_{l=1}^{n} 2^l) \max_k 2^{-k} = \frac{1}{2}\frac{2-2^{n+1}}{1-2} \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

On prend $v = (-1, 1, -1, \cdots, (-1)^n)$, on a $\|v\|_\infty = 1$ et :

$$\begin{aligned} \|A^{-1}v\|_\infty &= \max_k |\textstyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^j \beta_{kj}| \\ &= \max_k |\textstyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^j(-2)^{j-k}| \\ &= \max_k 2^{-k}|\textstyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^j(-2)^j| \\ &= \frac{1}{2}\textstyle\sum_{j=1}^{n} 2^j = 2^n - 1 = \|A^{-1}\|_\infty \end{aligned}$$

(c) $cond_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 3(2^n - 1)$ car $\|A\|_\infty = 1 + 2 = 3$.

$$\begin{aligned} cond_1(A) &= \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 \\ &= \|A^*\|_\infty \|(A^{-1})^*\|_\infty \\ &= 3 \max_{k=1,n} \textstyle\sum_{l=1}^{n} |(-2)^{k-l}| \\ &= 3(\textstyle\sum_{l=1}^{n} 2^{-l}) \max_{k=1,n} 2^k \\ &= 3(\frac{2^{-1}-2^{-n-1}}{1-2^{-1}})2^n \\ &= 3(2^n - 1) \end{aligned}$$

2. (a) $\|A^{-1}e_n\|_2 = \|\sum_{k=1}^{n} \beta_{kn}e_k\|_2 = \sqrt{\sum_k \beta_{kn}^2} = \sqrt{\sum_k 4^{n-k}} = 2^n\sqrt{\sum_k 4^{-k}} \ge 2^{n-1}$

(b) $\|Ae_2\|_2 = \|2e_1 + e_2\|_2 = \sqrt{5} > 2$. D'où :
$cond_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 \ge \|Ae_2\|_2 \|A^{-1}e_n\|_2 > 2.2^{n-1} = 2^n$.

Réponse 7 Utiliser l'exemple interactif du chapitre 1.

Réponse 8
1. La procédure d'échange de deux vecteurs : $u = (u_1 u_2 u_3 \cdots u_n)^T$ et $v = (v_1 v_2 v_3 \cdots v_n)^T$

```
Début de la procédure echang(u,v)
    Pour i allant de 1 à n faire
        x = u_i
        u_i = v_i
        v_i = x
    Fin faire i
Fin procédure
```

2. La procédure de remontée pour résoudre un système linéaire triangulaire : $A = (a_{ij})$ et $b = (b_i)$

```
Début de la procédure remonte(A,b,x)
    x_n = b_n
    Pour k allant de n-1 à 1 faire
        x_k = b_k
        Pour i allant de k+1 à n faire
            x_k = x_k - a_ki × x_i
        Fin faire i
    Fin faire k
Fin procédure
```

3. a) Le programme de la méthode de Gauss sans stratégie de pivot (dans ce cas on suppose qu'à chaque étape k de la méthode d'élimination de Gauss le coefficient à la position (k,k) est non nul) :

```
Début du programme Gauss1
    Pour i allant de 1 à n faire
        lire b_i
        Pour j allant de 1 à n faire
            lire a_ij
        Fin faire j
    Fin faire i
    Pour k allant de 1 à n-1 faire
        appel procédure : elimin(A,b,k)
    Fin faire k
    Appel procédure : remonte(A,b,x)
    Pour i allant de 1 à n faire
        affiche x_i
    Fin faire i
Début de la procédure remonte(A,b,x)
    x_n = b_n
    Pour k allant de n-1 à 1 faire
        x_k = b_k
        Pour i allant de k+1 à n faire
            x_k = x_k - a_ki × x_i
        Fin faire i
    Fin fair e k
Fin procédure
Début de la procédure elimin(A,b,k)
    pivot = a_kk
    Pour i allant de k+1 à n faire
        Pour j allant de k+1 à n faire
            a_ij = a_ij - a_ik × a_kj / pivot
        Fin faire j
    Fin faire i
Fin procédure
Fin programme Gauss1
```

b) Le programme de la méthode de Gauss avec pivot est le même que le programme Gauss1, sauf que juste avant de faire appel à la procédure d'élimination de Gauss : elimin(A,b,k), on fait appel à la procédure : pivot(A,b,k) qui recherche le pivot de l'étape k et permute la ligne de pivot avec la ligne k et il faut ajouter la procédure pivot(A,b,k) au programme.

Début de la procédure pivot(A,b,k)
$pivot = |a_{kk}|$
$l = k$
Pour i allant de k+1 à n faire
Si $|a_{ik}| > pivot$ alors
$pivot = |a_{ik}|$
$l = i$
Fin si
Fin faire i
Si $pivot = 0$ alors
affiche : A non inversible
quitter le programme
Fin si
Si $l \neq k$ alors
Pour j allant de k+1 à n
$x = a_{kj}$
$a_{kj} = a_{lj}$
$a_{lj} = x$
Fin faire j
$x = b_k$
$b_k = b_l$
$b_l = x$
Fin si
Fin procédure

Réponse 9 Utiliser l'exemple interactif du chapitre 1.