الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Batna 2

Faculté des Mathématiques et de l'informatique

Département de Mathématiques

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعـــــة باتنـــــة 2

كليـــــــة الرياضيات والإعلام الآلي

قسم الرياضيات

Analyse Numérique 2
Cours avec exercices corrigés

Par

Dr. El Amir Djeffal

2019/2020

Chapitre 2

Méthodes itératives pour la résolution d'un système linéaire

Les méthodes d'élimination ou de factorisation sont utilisées surtout lorsque l'ordre de la matrice est petit (matrice 100×100 par exemple) ou lorsque la matrice est pleine (i.e. peu de coefficients nuls).

Dans la pratique, beaucoup de problèmes nécessitent la résolution d'un système $Ax = b$ d'ordre assez important, avec, A une matrice creuse (i.e. beaucoup de coefficients nuls). Des systèmes de ce type sont donnés par exemple par l'application de la méthode des différences finies ou la méthode des éléments finis.

Pour ce genre de problèmes, on utilise les méthodes itératives. Etant donné un vecteur initial arbitraire x^0, on construit une suite de vecteurs

$$x^0, x^1, \cdots, x^k, \cdots$$

qui converge vers la solution x du système linéaire $Ax = b$.

2.1 Construction d'une méthode itérative

On considère le système linéaire

$$Ax = b \tag{1.1}$$

avec A une matrice carrée d'ordre n inversible et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Pour toute matrice M carrée d'ordre n inversible, le système (1.1) est équivalent à

$$Mx - (M - A)x = b \tag{1.2}$$

ou encore, en posant $N = M - A$, $B = M^{-1}N$ et $c = M^{-1}b$

$$x = Bx + c. \tag{1.3}$$

Ce qui nous permet de définir la méthode itérative :

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}^n, & \textit{vecteur initial} \\ x^{k+1} = Bx^k + c \end{cases} \tag{1.4}$$

Soit x la solution de (1.1), si on note $e^k = x^k - x$ le $k$ième vecteur erreur, on obtient

$$\begin{aligned} e^k &= x^k - x = (Bx^{k-1} + c) - (Bx + c) = B(x^{k-1} - x) \\ &= Be^{k-1} = B^k e^0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

On dit que la méthode itérative (1.4) converge si la suite de vecteurs (e^k) converge vers zéro indépendamment du vecteur initial x^0, ce qui est équivalent, d'après le théorème 2.3 du chapitre précédent, à l'une des deux propositions équivalentes :

(1) $\rho(B) < 1$

(2) $\| B \| < 1$ pour au moins une norme matricielle.

REMARQUE 2.1.1 *Pour chaque choix de la matrice inversible M, on obtient une méthode itérative. Le meilleur choix de M doit satisfaire les conditions suivantes :*

(a) *la matrice M est facile à inverser,*

(b) $\rho(B) = \rho(M^{-1}N)$ *est le plus petit possible.*

Dans la condition (a), on n'a pas besoin de l'inverse de M, il suffit que le calcul de x^{k+1} en fonction de x^k, en utilisant (1.2) :

$$Mx^{k+1} = Nx^k + b,$$

soit facile. La condition (b) est une conséquence du comportement asymptotique de l'erreur e^k ; en effet,

$$\begin{aligned} \lim_{k \longrightarrow \infty} \left[\max_{e^0 \neq 0} \| e^k \| / \| e^0 \|\right]^{1/k} &= \lim_{k \longrightarrow \infty} \left[\max_{e^0 \neq 0} \| B^k e^0 \| / \| e^0 \|\right]^{1/k} \\ &= \lim_{k \longrightarrow \infty} \| B^k \|^{1/k} = \rho(B) \end{aligned}$$

la méthode est donc d'autant plus rapide que $\rho(B)$ est plus petit (voir théorème 1.6 du chapitre précédent).

On considère la décomposition suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = D - E - F,$$

$$D = diag(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$$

$$E = -\begin{pmatrix} 0 & & & \\ a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = -\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

On suppose dans toute la suite que D est inversible et on pose

$$L = D^{-1}E, \quad U = D^{-1}F.$$

(1) ***la méthode de Jacobi***

$$M = D, \ N = E + F, \quad J = M^{-1}N = L + U$$

le calcul de x^{k+1} à partir de x^k se fait directement par le système

$$\left\{\begin{array}{llllllll} a_{11}x_1^{k+1} = & & -a_{12}x_2^k & -a_{13}x_3^k & \cdots & & -a_{1n}x_n^k & +b_1 \\ a_{22}x_2^{k+1} = & -a_{21}x_1^k & & -a_{23}x_3^k & \cdots & & -a_{2n}x_n^k & +b_2 \\ & & \vdots & & & & & \\ a_{nn}x_n^{k+1} = & -a_{n1}x_1^k & -a_{n2}x_2^k & \cdots & & -a_{nn-1}x_{n-1}^k & & +b_n \end{array}\right.$$

On remarque que la méthode de Jacobi nécessite n mémoires pour le vecteur x^k et n mémoires pour le vecteur x^{k+1}. La matrice J s'appelle la matrice de Jacobi.

(2) ***la méthode de Gauss-Seidel***

$$M = D - E, \ N = F, \ H = M^{-1}N = (I - L)^{-1}U$$

le calcul de x^{k+1} à partir de x^k se fait directement par le système

$$\left\{\begin{array}{llllllll} a_{11}x_1^{k+1} = & & -a_{12}x_2^k & -a_{13}x_3^k & \cdots & & -a_{1n}x_n^k & +b_1 \\ a_{22}x_2^{k+1} = & -a_{21}x_1^{k+1} & & -a_{23}x_3^k & \cdots & & -a_{2n}x_n^k & +b_2 \\ & & \vdots & & & & & \\ a_{nn}x_n^{k+1} = & -a_{n1}x_1^{k+1} & -a_{n2}x_2^{k+1} & \cdots & & -a_{n,n-1}x_{n-1}^{k+1} & & +b_n \end{array}\right.$$

la méthode de Gauss-Seidel nécessite seulement n mémoires, la composante x_i^{k+1} prend la place de x_i^k qui ne sera pas utilisée pour le calcul de $x_{i+1}^{k+1}, x_{i+2}^{k+1}, \cdots, x_n^{k+1}$.

(3) ***la méthode de relaxation***

$$\omega \neq 0, \quad \left\{\begin{array}{lll} M & = & \dfrac{D}{\omega} - E, \ N = \dfrac{1-\omega}{\omega}D + F, \\ H(\omega) & = & M^{-1}N = (I - \omega L)^{-1}[(1-\omega)I + \omega U], \end{array}\right.$$

le calcul de x^{k+1} à partir de x^k se fait directement par le système

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{k+1} & = a_{11}x_1^k & -\omega\{ & a_{11}x_1^k & +a_{12}x_2^k & +\cdots & & +a_{1n}x_n^k - b_1\} \\ a_{22}x_2^{k+1} & = a_{22}x_2^k & -\omega\{ & a_{21}x_1^{k+1} & +a_{22}x_2^k & +\cdots & & +a_{2n}x_n^k - b_2\} \\ & \vdots & & & & & & \\ a_{nn}x_n^{k+1} & = a_{nn}x_n^k & -\omega\{ & a_{n1}x_1^{k+1} & +\cdots & & +a_{n,n-1}x_{n-1}^{k+1} & +a_{nn}x_n^k - b_n\} \end{cases}$$

la méthode de relaxation nécessite seulement n mémoires. Le paramètre ω s'appelle le paramètre de relaxation et pour $\omega = 1$ on retrouve la méthode de Gauss-Seidel.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de Jacobi J et la matrice de Gauss-Seidel H sont données par :

$$J = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système qui donne la suite de la méthode de Jacobi est donné par :

$$\begin{cases} 2x_1^{k+1} & = -x_2^k - x_3^k + 1 \\ 2x_2^{k+1} & = -x_1^k - x_3^k \\ x_3^{k+1} & = x_1^k - x_2^k \end{cases}$$

Le système qui donne la suite de la méthode de Gauss-Seidel est donné par :

$$\begin{cases} 2x_1^{k+1} & = -x_2^k - x_3^k + 1 \\ 2x_2^{k+1} & = -x_1^{k+1} - x_3^k \\ x_3^{k+1} & = x_1^{k+1} - x_2^{k+1} \end{cases}$$

Pour les deux méthodes, on démarre de $x^0 = (0\ 0\ 0)^T$. A chaque itération k de la méthode de Jacobi, le vecteur $x = (x_1\ x_2\ x_3)^T$ joue le rôle de x^k et le vecteur $y = (y_1\ y_2\ y_3)^T$ joue le rôle de x^{k+1}. Par exemple, si on veut calculer x^3 :
$k = 0$: $x = (0\ 0\ 0)^T$ et y est donné par :

$$\begin{cases} y_1 & = (-x_2 - x_3 + 1)/2 & = 1/2 \\ y_2 & = (-x_1 - x_3)/2 & = 0 \\ y_3 & = x_1 - x_2 & = 0 \end{cases}$$

$k = 1$: $x = (1/2\ 0\ 0)^T$ et y est donné par :

$$\begin{cases} y_1 & = (-x_2 - x_3 + 1)/2 & = 1/2 \\ y_2 & = (-x_1 - x_3)/2 & = -1/4 \\ y_3 & = x_1 - x_2 & = 1/2 \end{cases}$$

$k = 2$: $x = (1/2\ \ -1/4\ 1/2)^T$ et y est donné par :

$$\begin{cases} y_1 & = (-x_2 - x_3 + 1)/2 & = (1/4 - 1/2 + 1)/2 = 3/8 \\ y_2 & = (-x_1 - x_3)/2 & = (-1/2 - 1/2)/2 = -1/2 \\ y_3 & = x_1 - x_2 & = 1/2 + 1/4 = 3/4 \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$x^3 = \begin{pmatrix} 3/8 \\ -1/2 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

A chaque itération k de la méthode de Gauss-Seidel, le vecteur $x = (x_1\ x_2\ x_3)^T$ joue le rôle de x^k et au même temps le rôle de x^{k+1}. Par exemple, si on veut calculer x^2 :
$k = 0$: $x = (0\ 0\ 0)^T$ et x est donné par :

$$\begin{cases} x_1 &= (-x_2 - x_3 + 1)/2 &= 1/2 \\ x_2 &= (-x_1 - x_3)/2 &= (-1/2 - 0)/2 = -1/4 \\ x_3 &= x_1 - x_2 &= 1/2 + 1/4 = 3/4 \end{cases}$$

$k = 1$: $x = (1/2\ \ -1/4\ 3/4)^T$ et x est donné par :

$$\begin{cases} x_1 &= (-x_2 - x_3 + 1)/2 &= (1/4 - 3/4 + 1)/2 = 1/4 \\ x_2 &= (-x_1 - x_3)/2 &= (-1/2 - 3/4)/2 = -5/8 \\ x_3 &= x_1 - x_2 &= 1/4 + 5/8 = 7/8 \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$x^2 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -5/8 \\ 7/8 \end{pmatrix}$$

On remarque que les itérations de la méthode de Jacobi nécessitent 6 variables : le vecteur x et le vecteur y, donc 6 mémoires et les itérations de la méthode de Gauss-Seidel nécessitent seulement 3 variables : le vecteur x, donc 3 mémoires.

2.2 Convergence

Dans le cas d'un système $Ax = b$, avec A une matrice hermitienne définie positive, le théorème suivant donne une condition suffisante pour qu'une méthode itérative associée à une décomposition $A = M - N$ converge.

THÉORÈME 2.2.1 *Soit A une matrice hermitienne définie positive, décomposée sous la forme*

$$A = M - N,\ M : \textit{ matrice inversible}.$$

Pour que la méthode itérative associée à cette décomposition converge, c'est à dire

$$\rho(M^{-1}N) < 1$$

il suffit que la matrice hermitienne $M^* + N$ soit définie positive.

DÉMONSTRATION : Vérifions d'abord que $M^* + N$ est hermitienne :

$$M^* + N = A^* + N^* + N = A + N + N^* = M + N^*.$$

Soit $\lambda \in sp(M^{-1}N)$ et soit $v \neq 0$ tel que

$$M^{-1}Nv = \lambda v$$

On pose
$$u = M^{-1}Av = (I - M^{-1}N)v = v - \lambda v$$
soit encore
$$\lambda v = v - u$$
on a alors :
$$\begin{aligned}
|\lambda|^2 v^*Av &= (v-u)^*A(v-u)\\
&= v^*Av - v^*Au - u^*Av + u^*Au\\
&= v^*Av - (Av)^*u - u^*Av + u^*Au\\
&= v^*Av - (Mu)^*u - u^*Mu + u^*Au\\
&= v^*Av - u^*(M^* + M - A)u\\
&= v^*Av - u^*(M^* + N)u
\end{aligned}$$
d'où
$$(1 - |\lambda|^2)v^*Av = u^*(M^* + N)u$$
comme $v \neq 0$, $u \neq 0$ et A, $M^* + N$ sont définies positives, on déduit que
$$|\lambda| < 1.$$

COROLLAIRE 2.2.1 *Soit A une matrice hermitienne définie positive, alors la méthode de relaxation converge pour $0 < \omega < 2$. En particulier, la méthode de Gauss-Seidel est convergente lorsque A est hermitienne définie positive.*

DÉMONSTRATION : La matrice A est hermitienne définie positive, d'où, les coefficients de la matrice diagonale D sont strictement positifs et $E^* = F$. D'autre part
$$M = \frac{D}{\omega} - E, \quad N = \frac{1-\omega}{\omega}D + F$$
d'où
$$M^* + N = \frac{2-\omega}{\omega}D$$
donc, pour $0 < \omega < 2$, la matrice hermitienne $M^* + N$ est définie positive.

THÉORÈME *(Kahan (1958)) Le rayon spectral de la matrice de relaxation*
$$H(\omega) = (I - \omega L)^{-1}\{\omega U + (1-\omega)I\}$$
vérifie pour tout $\omega \neq 0$:
$$\rho(H(\omega)) \geq |\omega - 1|.$$
Ce qui montre, en particulier, que la méthode de relaxation ne converge pas pour $\omega \notin]0, 2[$.

DÉMONSTRATION : On a
$$\prod_i \lambda_i(H(\omega)) = det(H(\omega)) = \frac{det(\omega U + (1-\omega)I)}{det(I - \omega L)} = (1-\omega)^n$$
or
$$\left|\prod_i \lambda_i(H(\omega))\right| \leq \rho(H(\omega))^n$$
d'où
$$\rho(H(\omega)) \geq |\omega - 1|.$$

DÉFINITION 2.2.1 *Soit A une matrice carrée et $J = L + U$ la matrice de Jacobi associée à A. On pose $J(\alpha) = \alpha L + \alpha^{-1}U$. On dit que la matrice A est correctement ordonnée si $sp(J(\alpha))$ est indépendant de α. Autrement dit*

$$sp(J(\alpha)) = sp(J), \quad \forall \alpha \neq 0.$$

THÉORÈME *(Young (1950)) Soit A une matrice correctement ordonnée et $\omega \neq 0$, alors*
(a) $\mu \in sp(J) \Longrightarrow -\mu \in sp(J)$
(b) $\mu \in sp(J)$ *et*

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \lambda\omega^2\mu^2, \tag{2.1}$$

alors $\lambda \in sp(H(\omega))$.
(c) $0 \neq \lambda \in sp(H(\omega)))$ *et μ vérifie (2.1), alors $\mu \in sp(J)$.*

DÉMONSTRATION :
(a) $J(-1) = -L - U = -J$, d'où

$$sp(J) = sp(J(-1)) = sp(-J).$$

(b)-(c) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\begin{aligned} det(\lambda I - H(\omega)) &= det\{(I - \omega L)(\lambda I - H(\omega))\} \\ &= det\{(\lambda + \omega - 1)I - \lambda\omega L - \omega U\} \end{aligned}$$

soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que

$$\alpha^2 = \lambda\omega^2, \quad et \quad \beta = \alpha/\omega$$

alors,

$$det(\lambda I - H(\omega)) = \alpha^n det\{\frac{(\lambda + \omega - 1)}{\alpha} I - (\beta L + \beta^{-1}U)\}.$$

D'autre part, μ est une solution de (2.1) si et seulement si

$$\mu = \pm\frac{(\lambda + \omega - 1)}{\alpha}.$$

Donc

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda \in sp(H(\omega)) \\ \mu = \pm\frac{(\lambda+\omega-1)}{\alpha} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} det\{\mu I - (\pm\beta L + (\pm\beta)^{-1}U)\} = 0 \\ \mu = \pm\frac{(\lambda+\omega-1)}{\alpha} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \mu \in sp(J(\pm\beta)) = sp(J) \\ \mu^2 = \frac{(\lambda+\omega-1)^2}{\lambda\omega^2} \end{array}\right.$$

COROLLAIRE 2.2.2 *Soit A une matrice correctement ordonnée, alors*

$$\rho(H) = (\rho(J))^2.$$

En particulier, si A est correctement ordonnée la méthode de Gauss-Seidel converge si et seulement si la méthode de Jacobi converge, et si les deux méthodes convergent et $\rho(J) \neq 0$, alors :

$$0 < \rho(H) < \rho(J) < 1.$$

DÉMONSTRATION : Pour $\omega = 1$, l'équation (2.1) devient :

$$\lambda^2 = \lambda\mu^2$$

et d'après les propriétés b) et c) du théorème de Young, on a :
(a) $\mu \in sp(J) \Longrightarrow \lambda = 0 \in sp(H)$ et $\lambda = \mu^2 \in sp(H)$
(b) $\lambda \in sp(H) \Longrightarrow \pm\mu \in sp(J)$ avec $\mu^2 = \lambda$
par conséquent, $\rho(J) = 0$ si et seulement si $\rho(H) = 0$ et si $\rho(J) \neq 0$ alors $\rho(H) = (\rho(J))^2$.

2.3 Détermination théorique du paramètre de relaxation optimal

Soit $A = D - E - F$ une matrice correctement ordonnée, avec D inversible. Nous supposons que la méthode de Jacobi est convergente. D'après le corollaire précédent la méthode de relaxation converge pour $\omega = 1$, et par continuité, il y a convergence sur un intervalle contenant 1. Le problème que nous voulons résoudre est de déterminer le paramètre de relaxation optimal ω_b tel que :

$$\rho(H(\omega_b)) = \min_{\omega} \rho(H(\omega)).$$

THÉORÈME 2.3.1 *Soit A une matrice correctement ordonnée, si toutes les valeurs propres de J sont réelles et $0 \leq \rho(J) < 1$, alors, la méthode de relaxation converge si seulement si $0 < \omega < 2$; de plus, on a :*

(1) $\omega_b = \dfrac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(J)^2}} = 1 + \left(\dfrac{\rho(J)}{1 + \sqrt{1 - \rho(J)^2}}\right)^2$
(2) $\rho(H(\omega_b)) = \omega_b - 1$
(3) $\rho(H(\omega)) > \rho(H(\omega_b)), \quad \forall\omega \neq \omega_b$.

DÉMONSTRATION : On peut limiter l'étude à $\omega \in]0, 2[$ (voir théorème de Kahan). D'après le théorème de Young, les valeurs propres non nulles de J sont des paires $\pm\mu_i$, avec :

$$0 \leq \mu_i \leq \rho(J)$$

et à chaque $\mu \in sp(J)$ correspond une paire de valeurs propres de $H(\omega)$

$$\{\lambda_m(\omega, \mu),\ \lambda_M(\omega, \mu)\}$$

solutions de (2.1) (on suppose que $\mid \lambda_m(\omega, \mu) \mid \leq \mid \lambda_M(\omega, \mu) \mid$), et à chaque valeur propre non nulle $\lambda \in H(\omega)$ correspond une valeur propre $0 \leq \mu \in sp(J)$ telle que

$$\lambda = \lambda_m(\omega, \mu) \quad ou \quad \lambda = \lambda_M(\omega, \mu).$$

D'où

$$\rho(H(\omega)) = \max_{\mu \in sp(J)} \mid \lambda_M(\omega, \mu) \mid$$

D'après l'équation (2.1)

$$(\omega - 1)^2 = \lambda_m(\omega, \mu)\lambda_M(\omega, \mu) \leq \mid \lambda_M(\omega, \mu) \mid^2$$

d'où

$$| \lambda_M(\omega,\mu) | \geq | \omega - 1 |$$

et on a :

$$| \lambda_m(\omega,\mu) | = | \lambda_M(\omega,\mu) | = | \omega - 1 |$$

dans le cas d'une racine double ou dans le cas de deux racines complexes conjuguées. D'après (2.1), si $\lambda \in sp(H(\omega))$ est réelle, alors, nécessairement $\lambda \geq 0$ et on a, pour $\omega \neq 0$:

$$\frac{\lambda + \omega - 1}{\omega} = \pm\mu\sqrt{\lambda}. \qquad (3.1)$$

On définit

$$g_\omega(\lambda) = \frac{\lambda + \omega - 1}{\omega}, \quad \omega \neq 0$$

et

$$m_\mu(\lambda) = \mu\sqrt{\lambda}, \quad 0 \leq \mu \leq \rho(J) < 1.$$

Le graphe de g_ω est la droite qui passe par $(1,1)$ et de pente $\frac{1}{\omega}$. Géométriquement, les solutions réelles de (2.1) sont données par l'intersection des deux courbes associées à g_ω et m_μ :

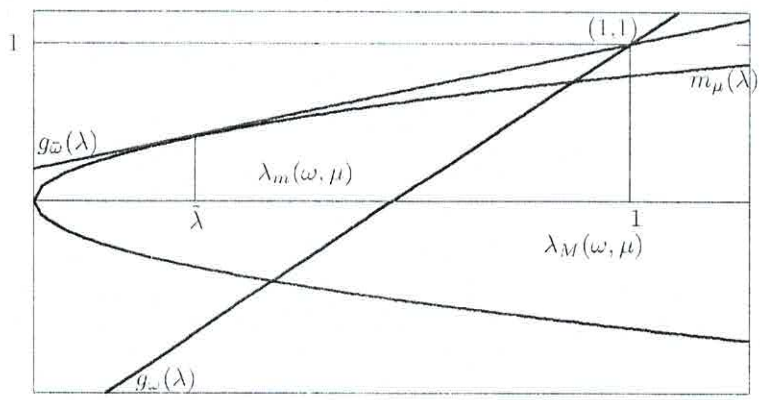

fig. 1.5

Pour $\omega > \bar\omega$, les racines de (2.1) sont complexes conjuguées (car la droite d'équation $g_\omega(\lambda)$ ne coupe pas les courbes $\pm m_\mu(\lambda)$). Il est clair, d'après le graphe ci-dessus, que pour $\omega \neq 0$ et tout $\forall\mu \in sp(J)$:

$$| \lambda_M(\omega,\mu) | = \begin{cases} \leq | \lambda_M(\omega,\rho(J)) | < 1, & si\ \lambda_M(\omega,\mu) \in \mathbb{R} \\ = | \omega - 1 | < 1, & sinon \end{cases}$$

or

$$| \lambda_M(\omega,\rho(J)) | \geq | \omega - 1 |$$

d'où

$$\forall\mu \in sp(J), \quad | \lambda_M(\omega,\mu) | \leq | \lambda_M(\omega,\rho(J)) | < 1$$

soit encore

$$\rho(H(\omega)) = | \lambda_M(\omega,\rho(J)) | < 1.$$

ce qui prouve que $H(\omega)$ converge pour $0 < \omega < 2$. Encore d'après le graphe ci-dessus, on a :

$$\rho(H(\omega)) = \begin{cases} \mid \lambda_M(\omega, \rho(J)) \mid > \mid \lambda_M(\bar{\omega}, \rho(J)) \mid, & \forall \omega < \bar{\omega} \\ \mid \omega - 1 \mid, & \forall \omega \geq \bar{\omega} \end{cases}$$

D'autre part $\bar{\omega}$ est la valeur de $\omega \in]0, 2[$ pour laquelle l'équation

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \lambda\omega^2(\rho(J))^2 \Longleftrightarrow \lambda^2 + \{2(\omega - 1) - \omega^2(\rho(J))^2\}\lambda + (\omega - 1)^2 = 0$$

a une racine double, c'est à dire :

$$\{2(\omega - 1) - \omega^2(\rho(J))^2\}^2 - 4(\omega - 1)^2 = 0$$

d'où

$$\omega^2(\rho(J))^2 - 4\omega + 4 = 0$$

Cette équation admet une racine ≥ 2 et une autre égale à :

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \frac{2 - \sqrt{4 - 4(\rho(J))^2}}{(\rho(J))^2} \\ &= \frac{2}{1 + \sqrt{1 - (\rho(J))^2}} \\ &= 1 + \left(\frac{\rho(J)}{1 + \sqrt{1 - \rho(J)^2}}\right)^2 \end{aligned}$$

et on a

$$\rho(H(\bar{\omega})) = \mid \lambda_M(\bar{\omega}, \rho(J)) \mid = \mid \bar{\omega} - 1 \mid = \bar{\omega} - 1.$$

D'où

$$\begin{aligned} \min_{\omega} \rho(H(\omega)) &= \min \left[\rho(H(\bar{\omega})) ; \min_{\omega \geq \bar{\omega}} \omega - 1\right] . \\ &= \bar{\omega} - 1 = \rho(H(\bar{\omega})) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\omega_b = \bar{\omega}$$

vérifie ce qu'il faut pour le théorème.

2.4 Exercices : chapitre 2

Exercice 1

1. Calculer dans chacun des cas suivants le rayon spectral de la matrice de la méthode de Jacobi et le rayon spectral de la matrice de la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution du système $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Que peut-on déduire ?

2. Montrer que si la matrice A est à diagonale dominante stricte :

$$\forall 1 \leq i \leq n, |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

alors la méthode itérative de Jacobi pour la résolution de $Ax = b$ est convergente (on pourra montrer que $\|J\|_\infty < 1$).

3. Etudier la convergence de la méthode de relaxation (pour la résolution du système $Ax = b$) lorsque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice d'ordre n telle que $a_{ii} \neq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. On rappelle que la matrice de Jacobi $J = L + U$ et la matrice de Gauss-Seidel $H = (I - L)^{-1}U$ avec $A = D - E - F$, $L = D^{-1}E$ et $U = D^{-1}F$. On dit que la matrice A est correctement ordonnée si :

$$\forall \alpha \neq 0, sp(J(\alpha)) = sp(J)$$

avec $J(\alpha) = \alpha L + \alpha^{-1}U$.

1. Calculer la matrice $J = (c_{ij})$ et la matrice $P_\alpha J P_\alpha^{-1} = (d_{ij})$ en fonction des coefficients de A avec $P_\alpha = diag(1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1})$.

2. Déduire qu'une matrice tridiagonale est correctement ordonnée.

3. En utilisant un théorème du cours, montrer que si A est tridiagonale alors :

$$sp(H) = \{0\} \cup \{\mu^2 / \mu \in sp(J)\}$$

Exercice 3

Le but de l'exercice est d'étudier le problème

$$\begin{cases} -u''(x) & = & f(x), x \in]0, 1[, \\ u(0) & = & u(1) = 0 \end{cases}$$

Soit $h = \frac{1}{N+1}$ avec $N \in \mathbb{N}^*$. Le problème discrétisé correspondant est : étant donné le vecteur $F = (f_i)_{1 \leq i \leq N}$ trouver $U = (u_i)_{1 \leq i \leq N}$ tel que

$$\begin{cases} -\frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) = f_i, \quad 1 \leq i \leq N, \\ \\ u_0 = u_{N+1} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que le système (1) est équivalent à la résolution de

$$AU = F$$

où on explicitera la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$.

2. Calculer les valeurs propres des matrices de Jacobi et Gauss-Seidel pour la résolution de $AU = F$ en fonction de celles de A (On pourra utiliser un exercice du chapitre précédent).
3. Comparer ces deux méthodes.
4. Donner le paramètre optimal de relaxation pour la matrice $\mathcal{L}_\omega$.

Exercice 4

Partie I :

Dans cette partie, on se propose de prouver quelques propriétés utiles pour la partie II. Soient K et M deux matrices carrées d'ordre n. On suppose que K et M sont symétriques et $(I+K)$ inversible, I étant la matrice identité d'ordre n.

1. Montrer que $\rho(K) = \|K\|_2$.
2. On rappelle que $\rho(L) \leq \|L\|$ pour toute matrice L et toute norme matricielle $\|.\|$. En utilisant 1), montrer que :
$$\rho(KM) \leq \rho(K)\rho(M).$$
3. Montrer que
   (a) $\lambda \in sp(K) \Rightarrow \lambda \neq -1$ et $\frac{\lambda}{1+\lambda} \in sp(K(I+K)^{-1})$,
   (b) $\beta \in sp(K(I+K)^{-1}) \Rightarrow \beta \neq 1$ et $\frac{\beta}{1-\beta} \in sp(K)$.
4. Montrer que : $\rho(K(I+K)^{-1}) < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}I + K$ est définie positive.

Partie II :

Soit A une matrice carrée d'ordre n symétrique. Cette partie est consacrée à l'étude d'une méthode itérative de résolution du système linéaire $Ax = b$. On introduit la décomposition
$$A = D + H + V$$
où $D = cI, c > 0$ et où H et V sont deux matrices symétriques telles que les deux matrices $D+H$ et $D+V$ soient inversibles. On considère la méthode itérative suivante :
$$\left\{\begin{array}{lcl} (D+H)x^{(k+\frac{1}{2})} & = & -Vx^{(k)} + b \\ (D+V)x^{(k+1)} & = & -Hx^{(k+\frac{1}{2})} + b \end{array}\right. \tag{2.1}$$

1. Exprimer $x^{(k+1)}$ en fonction de $x^{(k)}$. En déduire
$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x \Leftrightarrow \rho((D+V)^{-1}H(D+H)^{-1})V) < 1$$
2. On pose $B = D^{-1}H, C = D^{-1}V$.
   (a) Montrer que $\rho((D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}V) = \rho(B(I+B)^{-1}C(I+C)^{-1})$
   (b) Montrer que les matrices $B(I+B)^{-1}$ et $C(I+C)^{-1}$ sont des matrices symétriques. (On pourra utiliser, après justification, que $B(I+B)^{-1} = I-(I+B)^{-1}$).
   (c) En déduire que $\rho((D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}V) \leq \rho(B(I+B)^{-1})\rho(C(I+C)^{-1})$
3. Montrer que la méthode itérative (2.1) converge dès que $\frac{1}{2}D + H$ et $\frac{1}{2}D + V$ sont définies positives.

2.5 Corrigé des exercices : chapitre 2

Réponse 1

1. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$:

Jacobi : $M = D = I$,$N = E + F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et

$J = M^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$\det(\lambda I - J) = \lambda^3 \Longrightarrow sp(J) = \{0\} \Longrightarrow \rho(J) = 0$

Gauss-Seidel : $M = D - E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$H = M^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$sp(H) = \{0, 2, 1\} \Longrightarrow \rho(H) = 2$.

Conclusion : la méthode de Jacobi converge et la méthode de Gauss-Seidel diverge.

b).$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$:

Jacobi : $M = D = 2I$,

$N = E + F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J = M^{-1}N = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\det(\lambda I - J) = \lambda^3 + 5\lambda \Longrightarrow sp(J) = \{0, \pm\sqrt{5}\} \Longrightarrow \rho(J) = \sqrt{5}$

Gauss-Seidel : $M = D - E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $H = M^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{pmatrix}$

$sp(H) = \{0, \pm 0.5\} \Longrightarrow \rho(H) = 0.5$.

Conclusion : la méthode de Jacobi diverge et la méthode de Gauss-Seidel converge.

2. La matrice de Jacobi est égale à :

$$J = M^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-a_{12}}{a_{11}} & \frac{-a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{-a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{-a_{23}}{a_{22}} & \dots & \frac{-a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \frac{-a_{n-1n}}{a_{n-1n-1}} \\ \frac{-a_{n1}}{a_{nn}} & & & \frac{-a_{nn-1}}{a_{nn}} & 0 \end{pmatrix}$$

d'où,

$$\begin{aligned} \|J\|_\infty &= \max_i \textstyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left|\frac{-a_{ij}}{a_{ii}}\right| \\ &= \max_i \frac{1}{|a_{ii}|} \textstyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| < 1 \end{aligned}$$

3. $A = I - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D - E - F$, d'où :

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \left(\frac{D}{\omega} - E\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega} I + F\right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1-\omega}{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\omega}{\omega} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1-\omega}{\omega} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-\omega & 0 & 0 \\ -\omega(1-\omega) & 1-\omega & -\omega \\ 0 & 0 & 1-\omega \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui donne $sp(H(\omega)) = \{1-\omega\}$, soit $\rho(H(\omega)) = |1-\omega|$. Par conséquent, la méthode de relaxation converge pour $\omega \in]0, 2[$.

Réponse 2

1.

$$D^{-1}E = \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & & & \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & -\frac{a_{nn-1}}{a_{nn}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1}F = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ & & & & -\frac{a_{n-1n}}{a_{n-1n-1}} \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

$J = D^{-1}E + D^{-1}F = (c_{ij})$, d'où :

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i = j \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Si on note par d_{ij} les coefficients de la matrice $P_\alpha J P_\alpha^{-1}$, on obtient :

$$\begin{aligned} d_{ij} &= e_i^T P_\alpha J P_\alpha^{-1} e_j \\ &= e_i^T P_\alpha J \alpha^{1-j} e_j \\ &= \alpha^{1-j} e_i^T P_\alpha \textstyle\sum_{k=1}^{n} c_{kj} e_k \\ &= \alpha^{1-j} e_i^T \textstyle\sum_{k=1}^{n} \alpha^{k-1} c_{kj} e_k \\ &= \alpha^{1-j} \alpha^{i-1} c_{ij} = \alpha^{i-j} c_{ij} \end{aligned}$$

d'où :

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i = j \\ -\alpha^{i-j} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

2. Si A est tridiagonale, les coefficients non nuls de A situés sur la diagonale a_{ij} avec $i - j = 0$, la sous-diagonale a_{ij} avec $i - j = 1$ et la sur-diagonale a_{ij} avec $i - j = -1$. D'autre part, les coefficients non nuls de la matrice $-E$ sont les coefficients de la sous-diagonale et les coefficients non nuls de $-F$ sont les coefficients de la sur-diagonale. Ce qui donne que :

$$P_\alpha J P_\alpha^{-1} = \alpha L + \alpha^{-1} U = J(\alpha)$$

Donc, $J(\alpha)$ et J sont semblables et par conséquent, elles ont le même spectre.

3. D'après un théorème du cours, les valeurs propres $\{\lambda \in sp(H)\}$ et les valeurs propres $\{\mu \in sp(J)\}$ sont liées par la relation suivante :

$$\lambda^2 = \lambda \mu^2$$

car $\omega = 1$. D'où, chaque valeur propre $\mu \in sp(J)$ est associée à deux valeurs propres de H : $\lambda = 0$ et $\lambda = \mu^2$. D'autre part, $\det(H) = \det(I - L)^{-1} \det(U) = 0$, donc $\lambda = 0$ est une valeur propre de H, ce qui donne :

$$sp(H) = \{0\} \cup \{\mu^2, \mu \in sp(J)\}$$

Réponse 3 1.

$$-\frac{1}{h^2}\left\{\begin{array}{llll} -2u_1 & +u_2 & & = f_1 \\ u_1 & -2u_2 & +u_3 & = f_2 \\ \vdots & & & \\ u_{k-1} & -2u_k & +u_{k+1} & = f_k \\ \vdots & & & \\ u_{N-1} & -2u_N & & = f_N \end{array}\right.$$

ce qui donne le système $AU = F$ avec :

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \\ \vdots & & & & 0 \\ \vdots & & & & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$$

2. $A = D - E - F$ avec $D = \frac{2}{h^2}I$,

$$E = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ \vdots & & & & 0 \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } F = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$J = D^{-1}E + D^{-1}F = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \\ \vdots & & & & 0 \\ \vdots & & & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

J est donc tridiagonale. D'après un exercice du chapitre précédent :

$$sp(J) = \{\cos(\frac{k\pi}{n+1}) ; k = 1, \ldots, n\}$$

ce qui donne $\rho(J) = \cos(\frac{\pi}{n+1})$. D'après l'exercice précédent :

$$sp(H) = \{0\} \cup \{\cos^2(\frac{k\pi}{n+1}) ; k = 1, \ldots, n\}$$

Ce qui donne : $\rho(H) = \cos^2(\frac{\pi}{n+1})$.

3. Les deux méthodes sont convergentes et la convergence de la méthode de Gauss-Seidel est plus rapide que la convergence de la méthode de Jacobi car $\rho(H) = \rho(J)^2 < \rho(J) < 1$.

4. D'après un théorème du cours :

$$\omega_{optim} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(J)^2}} = \frac{2}{1 + \sin(\frac{\pi}{n+1})}.$$

Réponse 4

Partie I :

1. $\|K\|_2 = \sqrt{\rho(K^*K)}$, comme K est symétrique, d'après un théorème du cours :

$$\exists U \, unitaire / K = U^* diag(\lambda_i) U$$

avec $sp(K) = \{\lambda_i\}$. D'où, $K^*K = U^* diag(|\lambda_i|^2) U$, ce qui prouve que :

$$\rho(K^*K) = \max_i |\lambda_i|^2 = (\max_i |\lambda_i|)^2 = \rho(K)^2$$

2. $\rho(KM) \leq \|KM\|_2 \leq \|K\|_2 \|M\|_2 = \rho(K)\rho(M)$, car K et M sont des matrices symétriques.

3.a) $\lambda \in sp(K)$ alors, il existe $u \neq 0$ vecteur propre de K associé à λ tel que :

$$Ku = \lambda u$$

Comme $I + K$ est inversible, alors $\lambda \neq -1$ (sinon $(I+K)u = 0$ et $u \neq 0$).

D'autre part :

$$\begin{aligned} Ku = \lambda u \quad &\Longrightarrow (I+K)u = (\lambda+1)u \\ &\Longrightarrow u = (\lambda+1)(I+K)^{-1}u \\ &\Longrightarrow Ku = (\lambda+1)K(I+K)^{-1}u \\ &\Longrightarrow \lambda u = (\lambda+1)K(I+K)^{-1}u \\ &\Longrightarrow K(I+K)^{-1}u = \tfrac{\lambda}{1+\lambda}u \\ &\Longrightarrow \tfrac{\lambda}{1+\lambda} \in sp(K(I+K)^{-1}) \end{aligned}$$

b) $\beta \in sp(K(I+K)^{-1})$ alors, il existe $v \neq 0$ vecteur propre de $K(I+K)^{-1}$ associé à β tel que :

$$K(I+K)^{-1}v = \beta v$$

Comme $v \neq 0$, alors $u = (I+K)^{-1}v \neq 0$ et on a $v = (I+K)u$, d'où :

$$\begin{aligned} K(I+K)^{-1}v = \beta v \quad &\Longrightarrow Ku = \beta(I+K)u \\ &\Longrightarrow (1-\beta)Ku = \beta u \end{aligned}$$

ce qui montre que $\beta \neq 1$ et on a :

$$Ku = \frac{\beta}{1-\beta}u$$

ce qui donne :

$$\frac{\beta}{1-\beta} \in sp(K)$$

4. $\frac{1}{2}I + K$ est symétrique et elle est définie positive si et seulement si :

$$sp(\frac{1}{2}I + K) \subset]0, +\infty[$$

Supposons que $\rho(K(I+K)^{-1}) < 1$. Soit $\gamma \in sp(\frac{1}{2}I + K)$, alors , il existe $w \neq 0$ tel que :

$$(\frac{1}{2}I + K)w = \gamma w$$

ce qui donne $K\omega = (\gamma - \frac{1}{2})w$, donc, $\lambda = \gamma - \frac{1}{2} \in sp(K)$. D'après a), $\lambda = \gamma - \frac{1}{2} \neq -1$ et on a :

$$\frac{\gamma - \frac{1}{2}}{1 + \gamma - \frac{1}{2}} = \frac{\gamma - \frac{1}{2}}{\gamma + \frac{1}{2}} \in sp(K(I+K)^{-1})$$

Or $\rho(K(I+K)^{-1}) < 1$, d'où :

$$|\frac{\gamma - \frac{1}{2}}{\gamma + \frac{1}{2}}| = |\frac{\frac{1}{2} - \gamma}{\gamma + \frac{1}{2}}| = |\frac{1}{\gamma + \frac{1}{2}} - 1| < 1$$

ce qui donne :

$$-1 < \frac{1}{\gamma+\frac{1}{2}} - 1 < 1$$

d'où : $\frac{1}{2} < \gamma + \frac{1}{2}$, ou encore : $\gamma > 0$. Supposons que $\frac{1}{2}I + K$ est définie positive. Soit $\beta \in sp(K(I+K)^{-1})$. D'après b) :

$$\beta \neq 1 et \frac{\beta}{1-\beta} \in sp(K)$$

d'où $\frac{1}{2} + \frac{\beta}{1-\beta} \in sp(\frac{1}{2}I + K)$. Par conséquent :

$$\frac{1}{2} + \frac{\beta}{1-\beta} = \frac{1+\beta}{2(1-\beta)} > 0$$

ou encore :

$$\frac{1+\beta}{1-\beta} > 0$$

ce qui donne $\{1+\beta > 0$ et $1-\beta > 0\}$ ou $\{1+\beta < 0$ et $1-\beta < 0\}$. La première possibilité donne $-1 < \beta < 1$ et la deuxième est impossible, d'où, ce qu'il faut.

Partie II.

1. De la première équation, on a :

$$x^{(k-\frac{1}{2})} = -(D+H)^{-1}Vx^{(k)} + (D+H)^{-1}b$$

La deuxième équation devient alors :

$$x^{(k+1)} = (D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}Vx^{(k)} - (D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}b - b$$

ce qui donne une méthode itérative de matrice $(D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}V$, donc, la convergence de la suite (x^k) est équivalente à $\rho((D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}V) < 1$.

2. a) On a :

$$\begin{aligned}(D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}V &= (I+D^{-1}V)^{-1}D^{-1}H(I+D^{-1}H)^{-1}D^{-1}V\\ &= (I+C)^{-1}B(I+B)^{-1}C\\ &= (I+C)^{-1}B(I+B)^{-1}C(I+C)^{-1}(I+C)\end{aligned}$$

d'où, la matrice $(D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}V$ est semblable à $B(I+B)^{-1}C(I+C)^{-1}$, donc, elles ont le même spectre et par conséquent le même rayon spectral.

b)

$$\begin{aligned}B(I+B)^{-1} &= (B+I-I)(I+B)^{-1} = (B+I)(I+B)^{-1} - I(I+B)^{-1}\\ &= I-(I+B)^{-1}\end{aligned}$$

et il est clair que $I-(I+B)^{-1}$ est une matrice symétrique. Même chose pour $C(I+C)^{-1}$.

c) On a :

$$\rho((D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}V) = \rho(B(I+B)^{-1}C(I+C)^{-1})$$

Comme $B(I+B)^{-1}$ et $C(I+C)^{-1}$ sont deux matrices symétriques, d'après la partie I :

$$\rho(B(I+B)^{-1}C(I+C)^{-1}) \leq \rho(B(I+B)^{-1})\rho(C(I+C)^{-1})$$

3. D'après la partie I. question 4. $\rho(B(I+B)^{-1}) < 1$ si et seulement si $\frac{1}{2}I + B = D^{-1}(\frac{1}{2}D + H)$ est définie positive ce qui est encore équivalent à $\frac{1}{2}D + H$ est une matrice définie positive car $D = cI$ avec $c > 0$. On montre de même que : $\frac{1}{2}D + V$ est définie positive si et seulement si $\rho(C(I+C)^{-1}) < 1$. Par conséquent, $\frac{1}{2}D + H$ et $\frac{1}{2}D + V$ sont définies positives nous donne que $\rho(B(I+B)^{-1})\rho(C(I+C)^{-1}) < 1$, ce qui donne, d'après 2.a) :

$$\rho((D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}V) < 1$$

D'où, d'après 1., la convergence de la méthode itérative (1).