الجمهـورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Batna 2

Faculté des Mathématiques et de l'informatique

Département de Mathématiques

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعـــــة باتنـــــة 2

كليـــــــة الرياضيات والإعلام الآلي

قسم الرياضيات

Analyse Numérique 2

Cours avec exercices corrigés

Par

Dr. El Amir Djeffal

2019/2020

Chapitre 3

Méthodes itératives pour le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres

3.1 Introduction

Il est connu, d'après le théorème d'Abel, qu'il n'existe pas de méthode qui, au bout d'un nombre fini d'opérations, donne les racines d'un polynôme de degré $n \geq 5$. D'autre part, il est facile de vérifier que tout polynôme de degré $n \geq 2$ écrit sous la forme :

$$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

est égal, à un coefficient multiplicatif près, au polynôme caractéristique de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, les méthodes de calcul des valeurs propres d'une matrice A sont, en général, des méthodes itératives d'approximation, qui convergent (dans un sens à préciser) vers les valeurs propres.

Une façon pour approcher les valeurs propres d'une matrice consiste à construire une suite de matrices semblables à A :

$$A_k = P_k^{-1} A P_k$$

qui convergent vers une matrice dont les valeurs propres sont faciles à calculer, diagonale ou triangulaire par exemple.

3.2 Méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi s'applique uniquement au calcul des valeurs propres et des vecteurs propres des matrices symétriques.

On a vu, chapitre 1 corollaire 1.1, qu'une matrice symétrique est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et possède une base orthonormée de vecteurs propres, c'est à dire : il existe une matrice orthogonale O et n nombres réels $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ tels que

$$O^T A O = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n).$$

De plus, la $i$ème colonne de O est égale à un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.

DÉFINITION 3.2.1 *Soient p et q deux entiers vérifiant $1 \leq p < q \leq n$, et θ un nombre réel. On définit la matrice de rotation dans le plan (p, q) et d'angle θ par :*

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & cos\theta & & & -sin\theta & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & sin\theta & & & cos\theta & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Dans toute la suite et à chaque fois qu'on utilise une rotation d'angle θ dans le plan (p, q), l'entier p est supposé strictement inférieur à l'entier q.

3.2.1 Résultats préliminaires

On remarque facilement les points suivants :

- La matrice de rotation Ω est une matrice ortogonale :

$$\Omega^T \Omega = I$$

- Dans la transformation $A = (a_{ij}) \longrightarrow B = (b_{ij}) = \Omega A \Omega^T$, avec Ω la rotation d'angle θ dans le plan (p, q), seules les $p$ième et $q$ième colonnes et lignes de la matrice A sont modifiées :

$$\begin{cases} b_{ij} = a_{ij} \ si \ i \neq p, q \ \ et \ \ j \neq p, q, \\ b_{pi} = a_{pi}cos\theta - a_{qi}sin\theta \ \ si \ \ i \neq p, q, \\ b_{qi} = a_{pi}sin\theta + a_{qi}cos\theta \ \ si \ \ i \neq p, q, \\ b_{pp} = a_{pp}cos^2\theta + a_{qq}sin^2\theta - a_{pq}sin2\theta \\ b_{qq} = a_{pp}sin^2\theta + a_{qq}cos^2\theta + a_{pq}sin2\theta \\ b_{pq} = b_{qp} = a_{pq}cos2\theta + \frac{a_{pp}-a_{qq}}{2}sin2\theta \end{cases} \tag{3.1}$$

- La norme de *Frobenius* est invariante par transformation orthogonale, d'où,

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \tag{3.2}$$

PROPOSITION 3.2.1 *Soient $A = (a_{ij})$ une matrice symétrique et $B = (b_{ij}) = \Omega A \Omega^T$, où Ω est la rotation d'angle θ dans le plan (p, q), alors :*

(i) $b_{pp} + b_{qq} = a_{pp} + a_{qq}$

(ii) $b_{pp} - b_{qq} = (a_{pp} - a_{qq}) \cos 2\theta - 2a_{pq} \sin 2\theta$

(iii) $b_{pp}^2 + 2b_{pq}^2 + b_{qq}^2 = a_{pp}^2 + 2a_{pq}^2 + a_{qq}^2$

(iv) $\sum_{i \neq j} b_{ij}^2 = \sum_{i \neq j} a_{ij}^2 - 2(a_{pq}^2 - b_{pq}^2)$

DÉMONSTRATION :

Les formules (i) et (ii) se déduisent facilement des formules (3.1). On vérifie facilement par le calcul que :

$$\begin{pmatrix} b_{pp} & b_{pq} \\ b_{qp} & b_{qq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{qp} & a_{qq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

d'où, si on applique la norme de *Frobenius* à cette égalité et en utilisant encore une fois que la norme de *Frobenius* est invariante par transformation ortogonale, on obtient (iii). D'autre part, la formule (3.2) nous donne :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^2 &= (\sum_{i \neq j} b_{ij}^2) + (\sum_{i \neq p,q} b_{ii}^2) + b_{pp}^2 + b_{qq}^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \\ &= (\sum_{i \neq j} a_{ij}^2) + (\sum_{i \neq p,q} a_{ii}^2) + a_{pp}^2 + a_{qq}^2 \end{aligned}$$

et la première formule de (3.1) nous donne :

$$\sum_{i \neq p,q} b_{ii}^2 = \sum_{i \neq p,q} a_{ii}^2$$

il suffit donc d'utiliser (iii) pour obtenir (iv).

3.2.2 Principe de la méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi consiste à construire une suite de matrices semblables à la matrice A, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} A_1 &= A \\ A_{k+1} &= \Omega_k A_k \Omega_k^T \end{aligned}$$

où Ω_k est une matrice de rotation dans un plan $(\bar{p}, \bar{q})$ et d'angle $\bar{\theta}$ bien choisis. Il est clair que (A_k) est une suite de matrices semblables à A et on a :

$$A_{k+1} = (\Omega_k \Omega_{k-1} \cdots \Omega_1) A (\Omega_k \Omega_{k-1} \cdots \Omega_1)^T$$

On veut que A_k tende vers une matrice diagonale (qui est nécessairement semblable à A) quand $k \to \infty$. Par conséquent, si on note par $A_{k+1} = (b_{ij}(\theta, p, q))$ et $A_k = (a_{ij})$, on a intérêt à choisir $\bar{\theta}$ et $(\bar{p}, \bar{q})$ qui minimisent la somme des carrés des éléments hors diagonaux de la matrice A_{k+1}, c'est à dire :

$$\sum_{i \neq j} b_{ij}^2(\bar{\theta}, \bar{p}, \bar{q}) = \min_{\theta, p \neq q} \sum_{i \neq j} b_{ij}^2(\theta, p, q) \leq \sum_{i \neq j} a_{ij}^2$$

D'après la formule (iv) de la proposition 3.2.1, il faut et il suffit de choisir $\bar{p}, \bar{q}$ et $\bar{\theta}$ tels que :

$$a_{\bar{p}\bar{q}}^2 - b_{\bar{p}\bar{q}}^2(\bar{\theta}, \bar{p}, \bar{q}) = \max_{\theta, p \neq q}(a_{pq}^2 - b_{pq}^2(\theta, p, q))$$

donc, $\bar{p}, \bar{q}$ sont choisis tels que :

$$| a_{\bar{p}\bar{q}} | = \max_{p \neq q} | a_{pq} |$$

et $\bar{\theta}$ tel que :

$$b_{\bar{p}\bar{q}}(\bar{\theta}, \bar{p}, \bar{q}) = 0$$

PROPOSITION 3.2.2 *Pour tout (p, q) tel que $a_{pq} \neq 0$, il existe une unique valeur non nulle de θ, $-\frac{\pi}{4} < \theta \leq \frac{\pi}{4}$, telle que :*

$$b_{pq}(\theta, p, q) = 0$$

DÉMONSTRATION : D'après les formules (3.1), on a :

$$b_{pq} = b_{qp} = 0 \Longleftrightarrow cotg(2\theta) = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$$

or, la fonction $cotg(2\theta)$ est bijective de $]-\frac{\pi}{4}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{4}]$ dans $\mathbb{R}$. D'où, l'existence et l'unicité de $\theta \in]-\frac{\pi}{4}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{4}]$ tel que $b_{pq}(\theta, p, q) = 0$.

3.2.3 Convergence de la méthode de Jacobi

Soit $A_1 = A = (a_{ij}) = (a_{ij}^1)$ et $A_k = (a_{ij}^k)$ la matrice de l'itération k de la méthode de Jacobi. Soit p_k, q_k tels que

$$| a_{p_k q_k}^k | = \max_{p \neq q} | a_{pq}^k |$$

Soit $\theta_k \in]-\frac{\pi}{4}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{4}]$ l'unique solution de

$$cotg(2\theta) = \frac{a_{q_k q_k}^k - a_{p_k p_k}^k}{2a_{p_k q_k}^k} \tag{3.3}$$

et Ω_k la matrice de rotation dans le plan (p_k, q_k) d'angle θ_k. On définit la matrice A_{k+1} de l'itération $k+1$ par :

$$A_{k+1} = \Omega_k A_k \Omega_k^T$$

THÉORÈME 3.2.1 *La suite (A_k) de matrices obtenues par la méthode de Jacobi est convergente, et*

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} A_k = D$$

où D est une matrice diagonale qui a le même spectre que A.

DÉMONSTRATION : On note par

$$A_k = D_k + E_k, \quad \text{avec } D_k = diag\{a_{ii}^k\}$$

$$\varepsilon_k = \| E_k \|_F^2 = \sum_{i \neq j} | a_{ij}^k |^2$$

Il est clair que :

$$| a_{p_k q_k}^k |^2 \leq \varepsilon_k \leq n(n-1) \, | a_{p_k q_k}^k |^2 \qquad (3.4)$$

D'autre part, d'après la formule (iv) de la proposition 3.2.1

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k - 2 \, | a_{p_k q_k}^k |^2$$

car $a_{p_k q_k}^{k+1} = b_{p_k q_k} = 0$, et de (3.4) on tire que :

$$- | a_{p_k q_k}^k |^2 \leq \frac{-1}{n(n-1)} \varepsilon_k$$

ce qui donne :

$$0 \leq \varepsilon_{k+1} \leq r\varepsilon_k \leq r^2 \varepsilon_{k-1} \leq \cdots \leq r^k \varepsilon_1$$

avec

$$0 < r = (1 - \frac{2}{n(n-1)}) < 1$$

Par conséquent,

$$\lim_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0$$

Ce qui prouve que

$$\lim_{k \to \infty} E_k = 0$$

Soit $i \in \{1, 2, .., n\}$ fixé. D'après les formules (3.1), (3.3), pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $i \neq p_k$ et $i \neq q_k$ on a :

$$a_{ii}^{k+1} - a_{ii}^k = 0$$

si $i = p_k$ on a :

$$\begin{aligned}
a_{p_k p_k}^{k+1} - a_{p_k p_k}^k &= a_{p_k p_k}^k cos^2(\theta_k) + a_{q_k q_k}^k sin^2(\theta_k) - a_{p_k q_k}^k sin(2\theta_k) - a_{p_k p_k}^k \\
&= (a_{q_k q_k}^k - a_{p_k p_k}^k) sin^2(\theta_k) - a_{p_k q_k}^k sin(2\theta_k) \\
&= 2a_{p_k q_k}^k cotg(2\theta_k) sin^2(\theta_k) - a_{p_k q_k}^k sin(2\theta_k) \\
&= [2cotg(2\theta_k) sin^2(\theta_k) - sin(2\theta_k)] a_{p_k q_k}^k \\
&= -tg(\theta_k) a_{p_k q_k}^k
\end{aligned}$$

et enfin si $i = q_k$ on a :

$$\begin{aligned}
a_{q_k q_k}^{k+1} - a_{q_k q_k}^k &= a_{p_k p_k}^k sin^2(\theta_k) + a_{q_k q_k}^k cos^2(\theta_k) + a_{p_k q_k}^k sin(2\theta_k) - a_{p_k p_k}^k \\
&= (a_{q_k q_k}^k - a_{p_k p_k}^k) cos^2(\theta_k) + a_{p_k q_k}^k sin(2\theta_k) \\
&= 2a_{p_k q_k}^k cotg(2\theta_k) cos^2(\theta_k) + a_{p_k q_k}^k sin(2\theta_k) \\
&= [2cotg(2\theta_k) cos^2(\theta_k) + sin(2\theta_k)] a_{p_k q_k}^k \\
&= tg(\theta_k) a_{p_k q_k}^k
\end{aligned}$$

or $| \theta_k | \leq \frac{\pi}{4}$ ce qui donne $|tg(\theta_k)| \leq 1$, d'où :

$$|a_{p_k p_k}^{k+1} - a_{p_k p_k}^k| \leq |a_{p_k q_k}^k| \text{ et } |a_{q_k q_k}^{k+1} - a_{q_k q_k}^k| \leq |a_{p_k q_k}^k|$$

D'autre part

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mid a^k_{p_k q_k} \mid \leq \sqrt{\varepsilon_k} \leq (\sqrt{r})^{k-1}\sqrt{\varepsilon_1}$$

par conséquent

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mid a^{k+1}_{ii} - a^k_{ii} \mid \leq (\sqrt{r})^{k-1}\sqrt{\varepsilon_1}$$

d'où, la série numérique $\sum_k \mid a^{k+1}_{ii} - a^k_{ii} \mid$ est convergente, ce qui prouve que la série $\sum_k (a^{k+1}_{ii} - a^k_{ii})$ est convergente ou encore, la suite des sommes partielles

$$S_k = \sum_{l=1}^{k} (a^{l+1}_{ii} - a^l_{ii}) = a^{k+1}_{ii} - a^1_{ii}$$

est convergente. Par conséquent, pour tout i fixé, la suite (a^k_{ii}) converge, ce qui prouve que la suite de matrices (D_k) est convergente vers une matrice diagonale D. D'autre part, on a :

$$det(A_k - \lambda I) = det(A - \lambda I)$$

et par continuité, en utilisant le fait que $E_k \to 0$ et $D_k \to D$, on a :

$$\lim_{k \to \infty} det(A_k - \lambda I) = det(D - \lambda I)$$

Par conséquent, A et D ont le même polynôme caractéristique et la suite de Jacobi (A_k) converge vers D.

THÉORÈME 3.2.2 *On suppose que toutes les valeurs propres de A sont distinctes. Alors la suite de matrices orthogonales*

$$U_k = \Omega_k \Omega_{k-1} \cdots \Omega_1$$

converge vers une matrice orthogonale U dont les colonnes de la matrice U^T sont des vecteurs propres de la matrice A.

DÉMONSTRATION : Soit

$$\delta = \frac{1}{3} \min_{i \neq j} \mid \lambda_i - \lambda_j \mid > 0$$

avec

$$D = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} = \lim_{k \to \infty} D_k$$

et $D_k = diag(a^k_{ii})$. Soit $k_0 \geq 1$ tel que pour tout $1 \leq i \leq n$, on a :

$$\forall k \geq k_0, \quad \mid a^k_{ii} - \lambda_i \mid \leq \delta$$

d'où

$$\forall k \geq k_0, \ \forall i \neq j, \mid a^k_{ii} - a^k_{jj} \mid \geq \delta$$

en particulier

$$\forall k \geq k_0, \mid a^k_{q_k q_k} - a^k_{p_k p_k} \mid \geq \delta$$

ou encore

$$\forall k \geq k_0, \ 2 \mid a^k_{p_k q_k} \mid \mid cotg(2\theta_k) \mid \geq \delta$$

ce qui prouve que

$$\forall k \geq k_0, \ | tg(2\theta_k) | \leq 2\frac{| a^k_{p_k q_k} |}{\delta}$$

D'autre part,

$$| \alpha | \leq | tg(\alpha) |, \ \forall \alpha \in] - \pi/2, \pi/2[$$

d'où

$$\forall k \geq k_0, \ | \theta_k | \leq \frac{| a^k_{p_k q_k} |}{\delta} \leq \frac{\sqrt{\varepsilon_k}}{\delta}$$

D'autre part, en utilisant le fait que la norme de *Frobenius* est invariante par transformation ortogonale et que $U_{k+1} = \Omega_{k+1} U_k$:

$$\begin{array}{rcl} \| U_{k+1} - U_k \|^2_F & = & \| (\Omega_{k+1} - I) U_k \|^2_F \\ & = & \| (\Omega_{k+1} - I) \|^2_F \\ & = & 2(\cos\theta_{k+1} - 1)^2 + 2(\sin(\theta_{k+1}))^2 \\ & = & 8\sin^2(\theta_{k+1}/2) \\ & \leq & 2 \mid \theta_{k+1} \mid^2 \end{array}$$

Par conséquent

$$\forall k \geq k_0, \ \| U_{k+1} - U_k \|_F \leq \sqrt{2}\frac{\sqrt{\varepsilon_{k+1}}}{\delta} \leq \frac{\sqrt{2\varepsilon_1}}{\delta}(\sqrt{r})^k$$

d'où, la série $\sum \| U_{k+1} - U_k \|_F$ est convergente. donc, la série $\sum(U_{k+1} - U_k)$ est convergente. Ce qui prouve que la suite des sommes partielles

$$S_k = \sum_{l=1}^{k} U_{l+1} - U_l = U_{k+1} - U_1$$

est convergente. Donc, la suite de matrices orthogonales (U_k) est convergente vers une matrice orthogonale U et par passage à la limite on a :

$$D = UAU^T$$

d'où, la *i*ème colonne de U^T est un vecteur propre de A associé à λ_i.

3.2.4 Mise en oeuvre de la méthode de Jacobi

Dans la pratique on ne cherche pas à calculer le nombre θ_k pour déterminer les coefficients des lignes et des colonnes p_k, q_k de A_{k+1} ; on peut les obtenir par les relations algébriques suivantes : soit

$$R = \frac{a^k_{q_k q_k} - a^k_{p_k p_k}}{2a^k_{p_k q_k}}$$

et

$$t = tg\theta_k$$

on a les relations trigonométriques suivantes :

$$c = cos\theta_k = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$s = \sin\theta_k = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

et pour que $a^{k+1}_{p_k q_k}$ soit nul, il faut que

$$cotg2\theta_k = \frac{1}{tg2\theta_k} = \frac{1-t^2}{2t} = R$$

avec la condition $t \in]-1,0[\cup]0,1]$. D'où, t est égal à l'unique solution du trinôme

$$t^2 + 2Rt - 1 = 0, \quad t \in]-1,0[\cup]0,1].$$

On obtient alors les formules suivantes :

$$\begin{cases} a^{k+1}_{p_k i} = ca^k_{p_k i} - sa^k_{q_k i} & si \;\; i \neq p_k, q_k, \\ a^{k+1}_{q_k i} = sa^k_{p_k i} + ca^k_{q_k i} & si \;\; i \neq p_k, q_k, \\ a^{k+1}_{p_k p_k} = a^k_{p_k p_k} - ta^k_{p_k q_k} & \\ a^{k+1}_{q_k q_k} = a^k_{q_k q_k} + ta^k_{p_k q_k} & \\ a^{k+1}_{p_k q_k} = a^{k+1}_{q_k p_k} = 0 & \end{cases}$$

REMARQUE 3.2.1 *Un élément annulé à l'itération k peut devenir non nul à une itération $l > k$.*

On distingue trois stratégies pour le choix du couple (p,q) :

1. *Méthode de Jacobi classique : on choisit l'un des couples pour lesquels*

$$| a^k_{pq} | = \max_{i \neq j} | a^k_{ij} | .$$

2. *Méthode de Jacobi cyclique : on annule successivement tous les éléments hors-diagonaux par un balayage cyclique, toujours le même : par exemple, on choisit les couples (p,q) dans l'ordre suivant*

$$(1,2), (1,3), \cdots, (1,n); (2,3), \cdots, (2,n); \cdots; (n-1,n)$$

3. *Méthode de Jacobi avec seuil : on procède comme dans le cas de la méthode de Jacobi cyclique mais on omet d'annuler les éléments hors-diagonaux dont le module est inférieur à un certain seuil.*

EXEMPLE

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

On pose $A_1 = (a^1_{ij}) = A$. La matrice $A_2 = (a^2_{ij})$ de la première itération de la méthode de Jacobi classique est obtenue comme suit : on cherche d'abord la position (p,q) du plus grand coefficient en valeur absolue en dehors de la diagonale de A_1 : c'est la position (2,3), on calcule le nombre :

$$R = \frac{a^1_{33} - a^1_{22}}{2a^1_{23}} = \frac{3-3}{-8} = 0$$

on résout l'équation : $t^2+2Rt-1 = t^2-1 = 0$, on prend l'unique solution qui est dans $]-1,0[\cup]0,1]$ (dans notre cas c'est $t=1$), on pose $c = 1/\sqrt{1+t^2} = 1/\sqrt{2}$, $s = t/\sqrt{1+t^2} = 1/\sqrt{2}$ et enfin on a :

$$\begin{aligned}
&a_{11}^2 = a_{11}^1 = 2\\
&a_{21}^2 = a_{12}^2 = c \times a_{21}^1 - s \times a_{31}^1 = -1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2} = -2/\sqrt{2}\\
&a_{31}^2 = a_{13}^2 = s \times a_{21}^1 + c \times a_{31}^1 = -1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2} = 0\\
&a_{32}^2 = a_{23}^2 = 0\\
&a_{22}^2 = a_{22}^1 - t \times a_{23}^1 = 3 + 4 = 7\\
&a_{33}^2 = a_{33}^1 + t \times a_{23}^1 = 3 - 4 = -1
\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{-2}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{2}} & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.3 Transformation de Householder et la factorisation QR

3.3.1 Transformation de Householder

A tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$, on associe la matrice

$$H = \begin{cases} I - \dfrac{2uu^T}{\| u \|_2^2} = I - \dfrac{uu^T}{\beta}, \text{ avec } \beta = \dfrac{1}{2} \| u \|_2^2 \text{ si } u \neq 0, \\ I, \text{ si } u = 0 \end{cases},$$

la matrice H est appelée la matrice de Householder et le vecteur u est appelé le vecteur de Householder. (On note parfois $H(u)$ pour montrer la dépendance du vecteur u). Il est facile de voir que les matrices de Householder sont symétriques ($H = H^T$), orthogonales ($H^T H = HH^T = I$) et dépendent seulement de la direction du vecteur de Householder.

Les matrices de Householder ont deux propriétés importantes :

- pour tout vecteur $a \neq 0$ et tout vecteur $0 \neq b \neq a$, avec $\| a \|_2 = \| b \|_2$, il existe un vecteur de Householder u tel que :

$$Ha = (I - \frac{uu^T}{\beta})a = b$$

soit encore

$$(-\frac{u^T a}{\beta})u = b - a \tag{3.5}$$

d'où u est un multiple de $b - a \neq 0$. D'autre part, si $u = b - a$, en utilisant le fait que $b^T b = a^T a$, on obtient :

$$\begin{aligned} Ha &= a - 2\frac{(b-a)^T a}{(b-a)^T(b-a)}(b-a) \\ &= b + \{ -1 - 2\frac{(b-a)^T a}{(b-a)^T(b-a)} \}(b-a) = b \end{aligned} \tag{3.6}$$

- tout vecteur transformé par H a une forme spéciale. Si on applique H à un vecteur c, on obtient :

$$Hc = (I - \frac{uu^T}{\beta})c = c - (\frac{u^T c}{\beta})u \tag{3.7}$$

d'où, le vecteur Hc est la différence entre le vecteur c et un multiple du vecteur de Householder u. On déduit aussi de (3.7) que l'application de H à c ne change pas les composantes qui correspondent à des composantes nulles de u et que c est invariant par H si $u^T c = 0$. Enfin, le calcul de Hc nécessite seulement le vecteur u et le scalaire β.

Par exemple, soit $u = (-1, -2)^T$, on a

$$\| u \|_2^2 = 5$$

$$H = I - \frac{uu^T}{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{-3}{5} \end{pmatrix}.$$

3.3.2 Factorisation QR

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée réelle quelconque. La factorisation QR consiste à trouver une matrice Q orthogonale et une matrice R triangulaire supérieure telles que : $A = QR$. En utilisant les propriétés des matrices de Householder, on va construire une suite de $(n-1)$ matrices de Householder telles que :

$$H_{n-1} H_{n-2} \cdots H_2 H_1 A = R$$

où R est une matrice triangulaire supérieure.

La première étape consiste à construire une matrice de Householder H_1 qui transforme a_1 (la première colonne de A) en un multiple de e_1, ce qui revient à annuler les composantes $a_{21}, a_{31}, \cdots, a_{n1}$. La norme Euclidienne est invariante par transformation orthogonale, par conséquent, on cherche u_1 tel que

$$H_1 a_1 = (I - \frac{u_1 u_1^T}{\beta_1})a_1 = \pm \| a_1 \|_2 \, e_1 = \begin{pmatrix} r_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $| r_{11} | = \| a_1 \|_2$. Nous savons que u_1 doit être un multiple de $\pm \| a_1 \|_2 e_1 - a_1$ (voir (3.5)). Comme H_1 dépend uniquement de la direction de u_1, on prendra u_1 comme suit :

$$u_1 = \begin{pmatrix} a_{11} - r_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}.$$

Par définition de u_1, le signe de r_{11} peut-être positif ou négatif. Pour éviter les erreurs numériques, le signe de r_{11} est en général choisi de la manière suivante :

$$sign(r_{11}) = -sign(a_{11}).$$

pour que $\beta = \frac{1}{2} \parallel u \parallel_2^2$ soit le plus grand possible, car on divise par β. Après application de la matrice de Householder H_1, la première colonne de $A_2 = H_1 A$ est un multiple de e_1 :

$$A_2 = H_1 A = \begin{pmatrix} r_{11} & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Tous les éléments de A sont modifiés. Pour i allant de 2 à n, on a : *la colonne a_i est remplacée par $a_i - \frac{u_1^T a_i}{\beta_1} u_1$.*

A la deuxième étape, il faut que la matrice de Householder H_2 ne change pas la première colonne et la première ligne de A_2. Pour cela, il suffit de choisir le vecteur de Householder u_2 orthogonal à e_1, c'est à dire la première composante de u_2 nulle. Avec un tel choix, l'application de H_2 à un vecteur quelconque ne change pas sa première composante et l'application de H_2 à un multiple de e_1 (comme le cas de la première colonne de A_2) le laisse inchangé, d'où :

$$a = \begin{pmatrix} a_{12}^{(2)} \\ a_{22}^{(2)} \\ a_{32}^{(2)} \\ \vdots \\ a_{n2}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} a_{12}^{(2)} \\ r_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = b - a = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{22}^{(2)} - r_{22} \\ a_{32}^{(2)} \\ \vdots \\ a_{n2}^{(2)} \end{pmatrix}$$

avec $r_{22} = \pm\sqrt{(a_{22}^{(2)})^2 + \cdots + (a_{n2}^{(2)})^2}$ pour que $\|a\|_2 = \|b\|_2$.

Au bout de $(n-1)$ étapes de réduction de Householder, nous obtenons :

$$H_{n-1} \cdots H_1 A = R$$

où R est une matrice triangulaire supérieure.

On pose

$$Q^T = H_{n-1} \cdots H_2 H_1$$

soit

$$Q = H_1 H_2 \cdots H_{n-1}$$

ce qui donne la factorisation QR de A :

$$Q^T A = R \text{ ou } A = QR,$$

avec Q est une matrice orthogonale et R est une matrice triangulaire supérieure.

REMARQUE 3.3.1 *Dans le cas d'une matrice A carrée à coefficients complexes, on peut refaire les mêmes calculs, en remplaçant u^T par u^* dans la définition de la matrice de Householder, pour obtenir une factorisation $A = QR$ avec Q une matrice unitaire et R une matrice triangulaire et dans ce cas les matrices de Householder sont hermitiennes et unitaires.*

EXEMPLE
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le calcul suivant donne la factorisation QR de la matrice A. La norme 2 de la première colonne de A est égale à $\sqrt{1+2^2+2^2} = 3$, d'où, le vecteur u_1 de la matrice H_1 est égal à :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ce qui donne : $\beta_1 = \frac{1}{2}\|u_1\|_2^2 = 12$ et

$$H_1 = I_3 - \frac{u_1 u_1^T}{\beta_1} = \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}, \quad H_1 A = \begin{pmatrix} -3 & -1/3 & -8/3 \\ 0 & -8/3 & -7/3 \\ 0 & -5/3 & -7/3 \end{pmatrix}$$

Pour calculer le vecteur u_2 de la matrice H_2, on doit calculer : $r_{22} = \pm\sqrt{64/9 + 25/9} = \pm\sqrt{89}/3$, d'où :

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -8/3 - \sqrt{89}/3 \\ -5/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5.81 \\ -1.66 \end{pmatrix}$$

ce qui donne : $\beta_2 = \frac{1}{2}\|u_2\|_2^2 = 18.27$ et

$$H_2 H_1 = (I_3 - \frac{u_2 u_2^T}{\beta_2})H_1 = \begin{pmatrix} -0.33 & -0.66 & -0.66 \\ 0.91 & -0.38 & -0.07 \\ -0.21 & -0.63 & 0.74 \end{pmatrix}, \quad R = H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} -3 & -0.33 & -2.66 \\ 0 & 3.14 & 3.21 \\ 0 & 0 & -0.74 \end{pmatrix}$$

et la matrice

$$Q = H_1 H_2 = \begin{pmatrix} -0.33 & 0.91 & -0.21 \\ -0.66 & -0.38 & -0.63 \\ -0.66 & -0.07 & 0.74 \end{pmatrix}$$

3.4 Méthode QR

Soit $A_1 = A$ une matrice quelconque; on écrit sa factorisation QR, soit $A_1 = Q_1 R_1$, puis on forme $A_2 = R_1 Q_1$; on écrit sa factorisation QR, soit $A_2 = Q_2 R_2$, puis on forme la matrice $A_3 = R_2 Q_2$. A l'étape k, on écrit la factorisation QR de A_k, soit $A_k = Q_k R_k$ puis on forme $A_{k+1} = R_k Q_k$ et ainsi de suite. On obtient ainsi une suite de matrices A_k qui sont toutes semblables à la matrice A, puisque :

$$\begin{aligned} A_2 &= R_1 Q_1 = Q_1^* A Q_1 \\ &\vdots \\ A_{k+1} &= R_k Q_k = Q_k^* A_k Q_k \\ &= \cdots = (Q_1 Q_2 \cdots Q_k)^* A (Q_1 Q_2 \cdots Q_k). \end{aligned}$$

Dans la pratique, avant d'appliquer la méthode QR, on commence par mettre la matrice A sous la forme d'une matrice de Hessenberg supérieure :

$$\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
\times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
 & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
 & & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
 & & & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
 & & & & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
 & & & & & \times & \times & \times & \times & \times \\
 & & & & & & \times & \times & \times & \times \\
 & & & & & & & \times & \times & \times \\
 & & & & & & & & \times & \times
\end{pmatrix}$$

semblable à A, en utilisant les matrices de Householder (voir exercice 3).

L'intérêt de la mise sous la forme de Hessenberg de la matrice A est que la suite des matrices A_k de la méthode QR d'une matrice de Hessenberg restent sous la forme de Hessenberg (voir exercice 4), ce qui réduit considérablement le temps de calcul. Vu la forme des matrices de Hessenberg, il suffit d'annuler les coefficients de la sous-diagonale. Si à l'étape k un élément de la sous-diagonale de la matrice A_k est numériquement nul, on partage la matrice en deux sous-matrices

$$A_k = \begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
\times & & A_k^1 & & \times & \times & & & & \times \\
 & \times & & & \times & \times & & & & \times \\
 & & \times & & \times & \times & & & & \times \\
 & & & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
 & & & & 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\
 & & & & & \times & & A_k^2 & & \times \\
 & & & & & & \times & & & \times \\
 & & & & & & & \times & & \times \\
 & & & & & & & & \times & \times
\end{pmatrix}$$

et il est clair que

$$spectre(A_k) = spectre(A_k^1) \cup spectre(A_k^2)$$

ce qui permet de réduire l'ordre de la matrice. On garde le bloc A_k^1 en mémoire et recommence la méthode QR avec le bloc A_k^2, ainsi de suite, jusqu'à ce que le bloc inférieur soit d'ordre deux (resp. un), dans ce cas on a déterminé deux valeurs propres (resp. une valeur propre). Puis on redémarre avec le bloc qui est juste avant.

3.5 Exercices : chapitre 3

Exercice 1 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice semblable à A donnée par la première itération de la méthode de Jacobi.

Exercice 2 Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice A_1 semblable à A et qui a la forme d'une matrice de Hessenberg.
2. Déterminer la matrice A_2 semblable à A_1 donnée par la première itération de la méthode QR.

Exercice 3 (Forme de Hessenberg)

Soient $A = (a_{ij}) = A_1 = (a^1_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n et $(e_i)_{i=1,n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur $u_1 \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$ orthogonal à e_1 tel que :
$$H_1 A_1 = \begin{pmatrix} \times & \times & \cdots & \times \\ \times & \times & \cdots & \times \\ 0 & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \times & \cdots & \times \end{pmatrix}$$
avec $H_1 = H(u_1) =$ la matrice de Householder associée au vecteur u_1.
2. On pose $A_2 = H_1 A_1 H_1^T = H_1 A_1 H_1$. Montrer que A_2 a la forme :
$$A_2 = \begin{pmatrix} a^2_{11} & a^2_{12} & \cdots & \cdots & a^2_{1n} \\ a^2_{21} & a^2_{22} & \cdots & \cdots & a^2_{2n} \\ 0 & a^2_{32} & \cdots & \cdots & a^2_{3n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a^2_{n2} & \cdots & \cdots & a^2_{nn} \end{pmatrix}$$
3. On suppose qu'à la suite de l'étape $k-1$, on a une matrice A_k de la forme
$$A_k = \begin{pmatrix} a^k_{11} & a^k_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a^k_{1n} \\ a^k_{21} & a^k_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a^k_{2n} \\ 0 & a^k_{32} & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a^k_{3n} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a^k_{kk-1} & a^k_{kk} & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a^k_{k+1k} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a^k_{nk} & \cdots & \cdots & a^k_{nn} \end{pmatrix}$$
Montrer qu'il existe un vecteur $u_k \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$ orthogonal à e_i, $i = 1, k$, tel que

H_kA_k a la forme suivante :

$$H_kA_k = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_{3n} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & b_{k+1k} & b_{k+1k+1} & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{k+2k+1} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{nk+1} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

avec $H_k = H(u_k)$ = la matrice de Householder associée au vecteur u_k.

4. On pose $A_{k+1} = H_kA_kH_k^T = H_kA_kH_k$. Montrer que A_{k+1} a la forme suivante :

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{k+1} & a_{12}^{k+1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{k+1} \\ a_{21}^{k+1} & a_{22}^{k+1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{k+1} \\ 0 & a_{32}^{k+1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{3n}^{k+1} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{k+1k}^{k+1} & a_{k+1k+1}^{k+1} & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k+2k+1}^{k+1} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nk+1}^{k+1} & \cdots & \cdots & a_{nn}^{k+1} \end{pmatrix}$$

5. Déduire que toute matrice carrée A est semblable à une matrice qui a la forme d'une matrice de Hessenberg :

$$HS = \begin{pmatrix} \times & \times & \cdots & \cdots & \times \\ \times & \times & \cdots & \cdots & \times \\ 0 & \times & \ddots & & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \times & \times \end{pmatrix}$$

c'est à dire pour tout $j = 1, n-2$, le vecteur $HSe_j \in < e_1, e_2, \cdots, e_{j+1} >$ l'espace engendré par $e_1, e_2, \cdots, e_{j+1}$.

6. Montrer que si la matrice A est symétrique alors la matrice HS semblable à A obtenue par la méthode ci-dessus est symétrique. Déduire que toute matrice symétrique est semblable à une matrice tridiagonale.

Exercice 4

Soit A une matrice carrée d'ordre n qui a la forme d'une matrice de Hessenberg (voir exercice précédent). Soient $H_1, H_2, \cdots, H_{n-1}$ les matrices de Householder de la factorisation QR de la matrice A, c'est à dire : $Q = H_1H_2\cdots H_{n-1}$=matrice unitaire et $R = Q^*A$=matrice triangulaire.

1. Montrer que pour tout $k = 1, 2, \cdots, n-1$, on a :

$$\begin{cases} H_ke_k \in < e_k, e_{k+1} > \\ H_ke_{k+1} \in < e_k, e_{k+1} > \\ \forall i \neq k, i \neq k+1, \ H_ke_i = e_i \end{cases}$$

2. Montrer que pour tout $k = 1, 2, \cdots, n-1$:
   (a) $Qe_k = H_1 H_2 \cdots H_k e_k$
   (b) $Qe_k \in < e_1, e_2, \cdots, e_{k+1} >$
3. Déduire que la matrice $B = RQ$ a la forme d'une matrice de Hessenberg.
4. Conclusion : Montrer que si une matrice A a la forme d'une matrice de Hessenberg, alors, les matrices de la suite (A_k) de la méthode QR ont la forme d'une matrice de Hessenberg.

3.6 Corrigé des exercices : chapitre 3

Réponse 1 On trouve que $(p, q) = (1, 3)$, d'où : $R = -1/6$, ce qui donne le trinôme :

$$t^2 - 2Rt - 1 = t^2 - t/3 - 1 = 0$$

l'unique solution qui appartient à $]-1, 0[\cup]0, 1]$ est égale à $t = (1 - \sqrt{37})/6 \approx -0.847$, ce qui donne :

$$s = t/\sqrt{1+t^2} \approx -0.646, \quad c = 1/\sqrt{1+t^2} \approx 0.76$$

par conséquent, si on note par $B = (b_{ij})$ la matrice donnée par la première itération de la méthode de Jacobi classique, on obtient :

$$\begin{array}{ll}
b_{12} = b_{21} & = c \times a_{12} - s \times a_{32} \approx 0.76 \times (-1) - (-0.646) \times 2 \\
b_{14} = b_{41} & = c \times a_{14} - s \times a_{34} \approx 0.76 \times (1) - (-0.646) \times (-1) \\
b_{32} = b_{23} & = s \times a_{12} + c \times a_{32} \approx (-0.646) \times (-1) + (0.76) \times 2 \\
b_{34} = b_{43} & = s \times a_{14} + c \times a_{34} \approx (-0.646) \times (1) + (0.76) \times (-1) \\
b_{22} = a_{22} & = 3 \\
b_{44} = a_{44} & = 2 \\
b_{31} = b_{13} & = 0 \\
b_{11} & = a_{11} - t \times a_{13} \approx 1 - (-0.847) \times 3 \\
b_{33} & = a_{33} + t \times a_{13} \approx 2 - (-0.847) \times 3
\end{array}$$

Réponse 2

1. On trouve :

$$A_1 \approx \begin{pmatrix} 2 & 2.45 & 1.22 & 1.22 \\ 2.45 & -0.33 & -3.96 & -0.7 \\ 0 & 2.09 & -2.65 & 0.005 \\ 0 & 0 & 1.39 & 2.5 \end{pmatrix}$$

2. On trouve :

$$R_1 \approx \begin{pmatrix} -3.16 & -1.29 & -2.3 & 0.2 \\ 0 & 2.97 & -0.38 & 1.08 \\ 0 & 0 & -4.16 & 2.31 \\ 0 & 0 & 0 & 2.27 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 \approx \begin{pmatrix} -0.63 & 0.55 & 0.53 & -0.11 \\ -0.77 & -0.45 & -0.43 & 0.09 \\ 0 & 0.7 & -0.69 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0.21 & 0.97 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = R_1 Q_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2.77 & 0.51 & 0.09 \\ -2.3 & -1.6 & -0.79 & 1.28 \\ 0 & -2.93 & 3.38 & 1.62 \\ 0 & 0 & 0.49 & 2.22 \end{pmatrix}$$

Réponse 3 (Forme de Hessenberg)

1. On veut que $H_1 \begin{pmatrix} a^1_{11} \\ a^1_{21} \\ a^1_{31} \\ \vdots \\ a^1_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (voir cours) il suffit que $\| \begin{pmatrix} a^1_{11} \\ a^1_{21} \\ a^1_{31} \\ \vdots \\ a^1_{n1} \end{pmatrix} \|_2 = \| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \|_2$ et $u_1 = \begin{pmatrix} a^1_{11} \\ a^1_{21} \\ a^1_{31} \\ \vdots \\ a^1_{n1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Pour que u_1 soit orthogonal à e_1, il faut que $x_1 = a^1_{11}$ et pour avoir la même norme 2, il faut que

   $$\sum_{i=1}^{n} (a^1_{i1})^2 = (a^1_{11})^2 + (x_2)^2$$

   d'où

   $$x_2 = \pm \sqrt{\sum_{i=2}^{n} (a^1_{i1})^2}$$

   ce qui donne $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a^1_{21} \pm \sqrt{\sum_{i=2}^{n} (a^1_{i1})^2} \\ a^1_{31} \\ \vdots \\ a^1_{n1} \end{pmatrix}$.

2. $A_2 e_1 = H_1 A_1 H_1 e_1 = H_1 A_1 e_1 = H_1 \begin{pmatrix} a^1_{11} \\ a^1_{21} \\ a^1_{31} \\ \vdots \\ a^1_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2_{11} \\ a^2_{21} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ car $H_1 e_1 = e_1$, $(u_1 \perp e_1)$.

3. Même raisonnement que la première étape, on cherche

   $$u_k \perp e_i, i = 1, 2, \cdots, k \; / \; H_k \begin{pmatrix} a^k_{k1} \\ \vdots \\ a^k_{kk} \\ a^k_{k+1k} \\ \vdots \\ a^k_{n,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{k1} \\ \vdots \\ b_{kk} \\ b_{k+1k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

   on trouve :

   $$u_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a^k_{k+1k} \pm \sqrt{\sum_{i=k+1}^{n} (a^k_{ik})^2} \\ a^k_{k+2k} \\ \vdots \\ a^k_{nk} \end{pmatrix}$$

On a $H_k e_i = e_i$, $i = 1, 2, \cdots, k$, d'où :

$$\forall x \in < e_1, e_2, \cdots, e_k >, \ H_k x = x$$

Par conséquent :

$$\forall i = 1, 2, \cdots, k-1, H_k A_k e_i = A_k e_i$$

et

$$H_k A_k e_k = H_k \begin{pmatrix} a^k_{1k} \\ \vdots \\ a^k_{kk} \\ a^k_{k+1k} \\ \vdots \\ a^k_{n,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{kk} \\ b_{k+1k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. $A_{k+1} e_i = H_k A_k H_k e_i = H_k A_k e_i = A_k e_i$, $i = 1, 2, \cdots, k-1$ et

$$A_{k+1} e_k = H_k A_k H_k e_k = H_k A_k e_k = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{kk} \\ b_{k+1k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1}_{1k} \\ \vdots \\ a^{k+1}_{kk} \\ a^{k+1}_{k+1k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. A la suite de l'étape $n-2$, on obtient la forme HS de Hessenberg.
6. Si A est symétrique, alors A_k est symétrique pour tout $k = 1, 2, \cdots, n-2$. Donc, $HS = A_{n-2}$ est symétrique et il est clair qu'une matrice symétrique qui a la forme de Hessenberg est nécessairement tridiagonale.

Réponse 4

1. Par récurrence sur k. Pour $k = 1$, on a $u_1 = \begin{pmatrix} a^1_{11} \pm \sqrt{\sum_{i=1}^{2} (a^1_{i1})^2} \\ a^1_{21} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ car $A_1 = A$ a la forme d'une matrice de Hessenberg, d'où, $H_1 e_1 \in < e_1, e_2 >$ car $u_1 \in < e_1, e_2 >$ et on a bien : $H_1 e_i = e_i$ pour tout $i \geq 3$. Supposons que le résultat est vrai pour $1 \leq k \leq l-1$ et montrons qu'il est vrai pour $k = l$. On a :

$$\begin{aligned} A_l e_l &= H_{l-1} H_{l-2} \cdots H_1 A H_1 \cdots H_{l-2} H_{l-1} e_l \\ &\in H_{l-1} H_{l-2} \cdots H_1 A H_1 \cdots H_{l-2} < e_{l-1}, e_l > \\ &\vdots \\ &\in H_{l-1} H_{l-2} \cdots H_1 A < e_1, e_2, \cdots, e_l > \\ &\in H_{l-1} H_{l-2} \cdots H_1 < e_1, e_2, \cdots, e_{l+1} > \\ &\in < e_1, e_2, \cdots, e_{l+1} > \end{aligned}$$

Donc, $u_l \in < e_l, e_{l+1} >$ et par conséquent H_l vérifie :

$$\begin{aligned} &H_l e_l = e_l - \tfrac{(u_l^T e_l)}{\beta} u_l \in < e_l, e_{l+1} > \\ &H_l e_{l+1} = e_{l+1} - \tfrac{(u_l^T e_{l+1})}{\beta} u_l \in < e_l, e_{l+1} > \\ &H_l e_i = e_i - \tfrac{(u_l^T e_i)}{\beta} u_l = e_i \ \ \forall i \neq l, \forall i \neq l+1 \end{aligned}$$

2. a) D'après (1) $H_l e_k = e_k$ pour tout $l \geq k+1$, d'où : $Qe_k = H_1 H_2 \cdots H_{n-1} e_k = H_1 H_2 \cdots H_k e_k$

   b)
$$\begin{aligned} Qe_k &= H_1 H_2 \cdots H_k e_k \\ &\in H_1 H_2 \cdots H_{k-1} < e_k, e_{k+1} > \\ &\in < e_1, e_2, \cdots, e_{k+1} > \end{aligned}$$

3. La matrice R est triangulaire supérieure, d'où :
$$\forall l = 1, \cdots, n, \ R < e_1, e_2, \cdots, e_l > \subset < e_1, e_2, \cdots, e_l >$$
   ce qui donne :
$$\forall k = 1, \cdots, n-2, \ RQ < e_1, \cdots, e_k > \subset R < e_1, \cdots, e_{k+1} > \subset < e_1, \cdots, e_{k+1} >$$
   ce qui prouve que $B = RQ$ est une matrice de Hessenberg.

4. A chaque étape k de la méthode QR, on applique la factorisation QR à $A_k = Q_k R_k$ et on pose $A_{k+1} = R_k Q_k$. D'après les questions précédentes, si A_k a la forme d'une matrice de Hessenberg alors $R_k Q_k = A_{k+1}$ a aussi la forme d'une matrice de Hessenberg. Comme $A_1 = A$ a la forme d'une matrice de Hessenberg, un raisonnement par récurrence nous donne ce qu'il faut.