

TD 01 : L'information et le codage

EXO 01

Soit X une variable aléatoire discrète. Montrer que l'entropie d'une fonction de X est inférieure ou égale à l'entropie de X en justifiant les cas suivants :

$$H(X, g(X)) \stackrel{(a)}{=} H(X) + H(g(X)|X)$$

$$H(X, g(X)) \stackrel{(c)}{=} H(g(X)) + H(X|g(X))$$

$$\stackrel{(d)}{\geq} H(g(X))$$

EXO 02

Considérez qu'une pièce équilibrée est lancée. Quelle est l'information mutuelle entre la face en haut et celle qui est en bas ?

EXO 03

Une pièce est lancée jusqu'à l'occurrence d'une face. Soit X le nombre de lancements.

(a) Déterminez l'entropie $H(X)$ en bits. L'expression suivante peut être utile :

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

Déterminez une séquence de questions binaires (réponses oui/non) de la forme " $X \in S$?", où S est un ensemble. Comparez $H(X)$ avec le nombre moyen de questions nécessaires pour déterminer X .

EXO 04

Un tournoi consiste dans une séquence de trois combats et termine aussitôt un des joueurs gagne deux combats. Soit X la variable aléatoire qui représente le résultat d'un tournoi entre les joueurs A et B , par exemple AA , ou BAB . Soit Y le nombre de combats effectués. Y peut prendre les valeurs 2 et 3.

(a) Sous l'hypothèse que les joueurs A et B sont équilibrés et que les combats sont indépendants, calculez $H(X)$, $H(Y)$, et $H(X|Y)$.

