TD 01 : L'information et le codage

EXO 01

Soit X une variable aléatoire discrète. Montrer que l'entropie d'une fonction de X est inférieure ou égale à l'entropie de X en justifiant les cas suivants :

$$H(X, g(X)) \stackrel{(a)}{=} H(X) + H(g(X)|X)$$

$$H(X, g(X)) \stackrel{(c)}{=} H(g(X)) + H(X|g(X)) \stackrel{(d)}{\geq} H(g(X))$$

Sol 01

- (a) est une instance de la règle de la chaîne pour l'entropie conjointe:

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y),$$

avec $Y = g(X)$.

(c) règle de la chaîne (comme en (a)).

(d) est une conséquence immédiate de la non-négativité de l'entropie conditionnelle: $H(X|Y) \geq 0$, avec $Y = g(X)$.

EXO 02

Considérez qu'une pièce équilibrée est lancée. Quelle est l'information mutuelle entre la face en haut et celle qui est en bas ?

Sol 02

Nottons $X \in \mathcal{A} = \{\text{face}, \text{pile}\}$ la variable aléatoire qui décrit la face en

haut, et $Y \in \mathcal{A}$ une autre variable aléatoire qui décrit la face en bas de la pièce. La loi de probabilité conjointe est (en supposant que la pièce est équilibrée)

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/2, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases},$$

car il faut bien que la face en haut (X) soit diférente de celle en bas (Y). De cette loi nous obtenons directement la loi de probabilité conditionnelle

$$p_{Y|X=x}(y|x) = \begin{cases} 1, & y \neq x \\ 0, & y = x \end{cases}, \forall x \in \mathcal{A},$$

Et les lois :

$$p_X(x) = \frac{1}{2}, \forall x \in \mathcal{A}, \qquad p_Y(y) = \frac{1}{2}, \forall y \in \mathcal{A}.$$

L'information mutuelle est par définition

$$I(X;Y) = H(X) - H(Y|X) = H(Y) - H(Y|X)$$

Les entropies de X et de Y sont l'entropie d'une loi uniforme dans un alphabet de dimension 2, et donc

$$H(X) = H(Y) = \log 2 = 1 \text{ bit.}$$

L'entropie conditionnelle de Y sachant X (égale à celle de X sachant Y, car le problème est complètement symmétrique) est

$$H(Y|X) = \mathrm{E}_X\left[H(Y|X=x)\right] = \mathrm{E}_X\left[0\right] = 0,$$

car une fois X observée, la valeur de Y est déterminée avec certitude.
Nous obtenous donc

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(Y) = 1 \ \ bit.$$

EXO 03

Une pièce est lancée jusqu'à l'occurence d'une face. Soit X le nombre de lancements.

(a) Déterminez l'entropie $H(X)$ en bits. L'expression suivante peut être utile :

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \frac{r}{1-r)^2}.$$

Déterminez une séquence de questions binaires (réponses oui/non) de la forme " $X \in S$?", où S est un ensemble, Comparez $H(X)$ avec le nombre moyen de questions nécessaires pour déterminer X.

Sol 03

Soit p la probabilité d'une face dans chaque lancement de la pièce ($p = 1/2$ pour une pièce équilibrée). La loi du nombre de lancements jusquà l'occurrence de la première face est la *loi géométrique* :

$$p(X=n) = p(1-p)^{n-1}, n = 1, 2, \ldots$$

L'entropie de cette loi est, par définition

$$H(X) = -\sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} \log\left(p(1-p)^{n-1}\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} p(1-p)^n \log\left(p(1-p)^n\right)$$

Cette expression peut être écrite comme

$$
\begin{aligned}
H(X) &= -p\sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^n \log\left(p(1-p)^n\right) \\
&= -p\left[\sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^n \log p + \sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^n (n)\log(1-p)\right].
\end{aligned}
$$

Finalement, l'entropie est:

$$
H(X) = -p\left[\log p\frac{1}{p} + \log(1-p)\frac{1-p}{p^2}\right]
$$

Une bonne séquence de questions est celle où la quantité d'information associée à chaque question, sachant les réponses aux questions préc édantes, est maximale (1 bit, pour des questions "oui/non"), c'est à dire, dont les deux réponses possibles sont également probables. Considérons que la *pièce est équilibrée*, $p = 1/2$. Dans ce cas, la suite de questions

"$X = 1$" ?

"$X = 2$" ?

$\vdots$

"$X = n$" ?

$\vdots$

a effectivement une entropie maximale, car sachant que $x \notin [1, n-1]$ les probabilités pour que $X = n$ et $X > n$ sont les mêmes (1/2).
Le nombre de questions nécessaires pour déterminer la valeur de $X = x$ est $k = x$, et donc le nombre moyen de questions nécessaires est $E[k] = E[X] = \frac{1}{p} = 2$. Nous pouvons constater que cette valeur coincide avec l'entropie $H(X) = H(p)/p = 2$.

Exo 04

Un tournoi consiste dans une séquence de trois combats et termine aussitôt un des joueurs gagne deux combats. Soit X la variable aléatoire qui représente le résultat d'un tournoi entre les joueurs A et B, par exemple AA, ou BAB. Soit Y le nombre de combats effectués. Y peut prendre les valeurs 2 et 3.

(a) Sous l'hypothèse que les joueurs A et B sont équilibrés et que les combats sont indépendants, calculez $H(X)$, $H(Y)$, et $H(X|Y)$.

Sol 04

(a) Si les joueurs sont équilibrés, la probabilité de chaque branche est 1/2. Nous pouvons donc établir la probabilité conjointe de X et Y, résum ée par le tableau suivant

$Y : X$	AA	BB	ABA	ABB	BAA	BAB
2	1/4	1/4	0	0	0	0
3	0	0	1/8	1/8	1/8	1/8

Par un simple calcul de loi marginale, nous obtenons facilement que Y est une variable uniforme binaire, $Y \in \{2, 3\}$, que la loi de X est la suivante

X	AA	BB	ABA	ABB	BAA	BAB
p(X)	1/4	1/4	1/8	1/8	1/8	1/8

et que $p(X|Y = 2)$ est uniforme dans $\{AA, BB\}$ et $p(Y|X = 3)$ est uniforme dans $\{ABA, ABB, BAA, BAB\}$. Par application directe de la définition d'entropie, nous obtenons

$$H(Y) = \log 2 = 1bit,$$

et

$$H(X) = 2\frac{1}{4}\log 4 + 4\frac{1}{8}\log 8 = \frac{1}{2}2 + \frac{1}{2}3 = 2.5 \text{ bits.}$$

Nous pouvons encore écrire

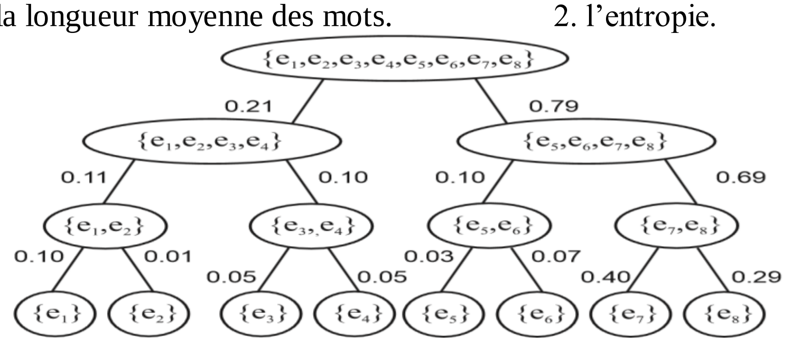
$$H(X|Y = 2) = \log 2 = 1 \text{ bit} \qquad H(X|Y = 3) = \log 4 = 2\text{bits.}$$

Nous avons donc

$$H(X|Y) = \frac{1}{2}H(X|Y = 2) + \frac{1}{2}H(X|Y = 3) = \frac{1}{2}(1 + 2) = 1.5 \text{ bits}$$

EXO 05

Etant donné l'arbre binaire représenté ci-dessous calculez
1. la longueur moyenne des mots. 2. l'entropie.



Sol 05

1. la longueur moyenne des mots est 3
2. l'entropie $H(P) = -\sum_{i=1}^{n} p_i log p_i$

$H(P) = -0.10\ log 0.10 - 0.01\ log 0.01 - 0.05\ log 0.05 - 0.05\ log 0.05 - 0.03\ log 0.03 - 0.07\ log 0.07 - 0.40\ log 0.40 - 0.29\ log 0.29 \simeq$2.297 bit

EXO 06

Considérons la transmission d'une source binaire dans un canal avec du bruit. La source S suit la loi de probabilité suivante :

P S(0) = q = ¼ ; PS(1) = 1 - q = ¾.

• La sortie du canal O peut être en erreur avec probabilité e= 1/8 , et donc:

P O(0) = q(1 - e) + (1 - q) e = 0.3125

P O(1) = (1-q)(1 - e) + q e = 0.6875 = 1-0.3125.

- Calculer l'entropie à l'entrée du canal.
- Calculer l'entropie à la sortie du canal.

Sol 06

Nous avons donc l'entropie de la source et de la sortie du canal

H(S) = 0.8113 bits et H(O) = 0.8960 bits