Chapitre 0 : Les nombres complexes

Contenu

0.1. Introduction :

Question : Trouver un nombre réel solution de l'équation algébrique : $x^2 + 1 = 0$.

Réponse : Il n'existe pas de nombre réel x qui soit solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$.

Pour donner des solutions à cette équation et à des équations semblables, on introduit un ensemble plus grand que celui des nombres réels. On appelle cet ensemble les nombres complexes.

L'ensemble des nombres complexes :

$\mathbb{C} = \{z : z = x + iy \,;\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

- z : est appelé nombre complexe.
- i : est appelé l'unité imaginaire, a la propriété $i^2 = -1$.
- L'ensemble $\mathbb{C}$ muni des deux opérations internes : l'addition et la multiplication $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

0.2. Définitions et propriétés:

0.2.1. Les nombres complexes

Soit $z = x + iy$, un nombre complexe où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- $x = Re(z)$ est la partie réelle de z.
- $y = Im(z)$ est la partie imaginaire de z.
- $\bar{z} = x - iy$ est le conjugué de z.

Exemple :

$z = -3 + 4i$

- $-3 = Re(z)$
- $4 = Im(z)$
- $\bar{z} = -3 - 4i$ est le conjugué de z.

Remarque : Soient deux nombres complexes z et z' : $z = z' \Leftrightarrow Re(z) = Re(z') et\ Im(z) = Im(z')$.

A. Opérations sur les nombres complexes :

- **L'addition :** $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- **La soustraction :** $(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$
- **La multiplication :** $(x_1 + iy_1)\,.(x_2 + iy_2) = (x_1.x_2 - y_1.y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
- **La division :** $\frac{(x_1+iy_1)}{(x_2+iy_2)} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)} = \frac{(x_1.x_2-y_1.y_2)}{x_2^2+y_2^2} + i\,\frac{(x_1.x_2-y_1.y_2)}{x_2^2+y_2^2}$

Exemple :

$$\frac{(2+3i)}{(1-2i)} = \frac{(2+3i)\ \ (1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{(2+3i)\ \ (1+2i)}{1^2+(-2)^2} = \frac{-4}{5} + i\,\frac{7}{5}$$

B. Propriétés :

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -\bar{z}$
- $z + \bar{z} = 2 \cdot Re(z) = 2x$
- $z - \bar{z} = 2.Im(z).i = 2iy$
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0$
- $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

C. Module et argument d'un nombre complexe :

1. Définition 1 :

Le module d'un nombre complexe $z = x + iy$ est défini par :

$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z.\bar{z}} = r.$

N.B. : le module d'un nombre complexe est toujours positif.

Exemple : $z = -3 + 4i$

$|z| = |-3 + 4i| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5.$

2. Propriétés :

- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (inégalité triangulaire)
- $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$
- $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$
- $|z|^2 = z \cdot \bar{z}.$
- $|Re(z)| \leq |z|$
- $|Im(z)| \leq |z|$
- $\mathbf{\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}}$

3. Définition 2 :

L'argument d'un nombre complexe z est défini par :

$arg(z) = arctg\left(\frac{y}{x}\right) = \theta + 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}.$

Un nombre complexe possède une infinité d'arguments.

L'unique argument $\theta \in]-\pi, \pi]$ est appelé **argument principal** de z, noté Arg(z).

Exemples :

$Arg(i) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$; $Arg(1) = 0[2\pi]$; $Arg(-1) = \pi[2\pi]$; $Arg(1+i) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Cas particuliers :

$z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) = 0[2\pi]$; $z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) = \pi[2\pi]$;

$z \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$; $z \in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

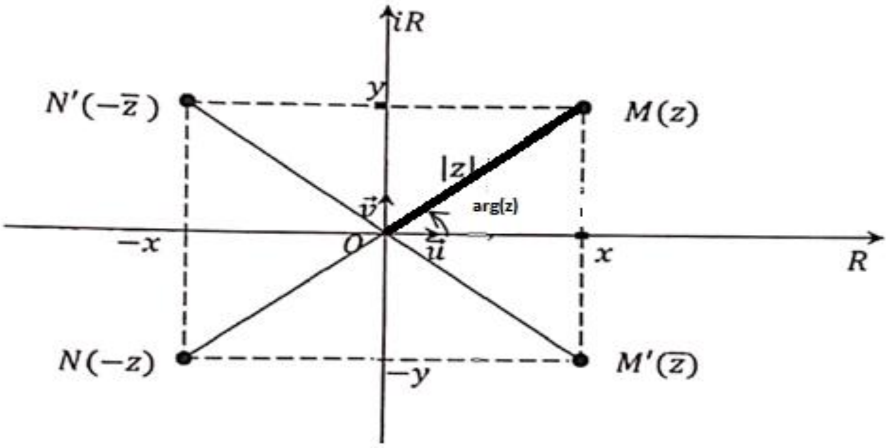
4. Propriétés :

- $arg(z^n) = n \cdot arg(z)[2\pi]$
- $arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg(z) = -\theta + 2k\pi$
- $arg(z_1 \cdot z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)[2\pi]$
- $arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2)[2\pi]$
- $arg(\bar{z}) = -arg(z) + 2k\pi$
- $arg(-z) = \pi + arg(z) + 2k\pi$
- $arg(-\bar{z}) = \pi - arg(z) + 2k\pi \; , \quad k \in \mathbb{Z}$

0.3. Représentation géométrique d'un nombre complexe :

- A chaque nombre complexe $z = x + iy$ correspond un point $M(x, y)$ du plan complexe.
- Le point $M(x, y)$ s'appelle l'image du nombre complexe $z = x + iy$. On note M(z).
- Le nombre complexe $z = x + iy$ s'appelle l'affixe du point $M(x, y)$. On note z=affixe (M).
- Les images de deux nombres complexes conjugués sont symétriques par rapport à l'axe des réels.
- Les images de deux nombres complexes opposés sont symétriques par rapport à l'origine.
- Le module de z est la distance OM : $|z| = OM.$

- $|z-a|$ représente la distance du point d'affixe z au point d'affixe a.
- $x = r.\cos\theta$ et $y = r.\sin\theta$



0.3.1. Courbes dans le plan complexe :

Cercle :

- $|z-z_0| = r$: Cercle de centre $z_0 = x_0 + iy_0$ et de rayon r.
- $|z-z_0| \le r$: Disque fermé de centre $z_0 = x_0 + iy_0$ et de rayon r.
- $|z-z_0| < r$: Disque ouvert de centre $z_0 = x_0 + iy_0$ et de rayon r.

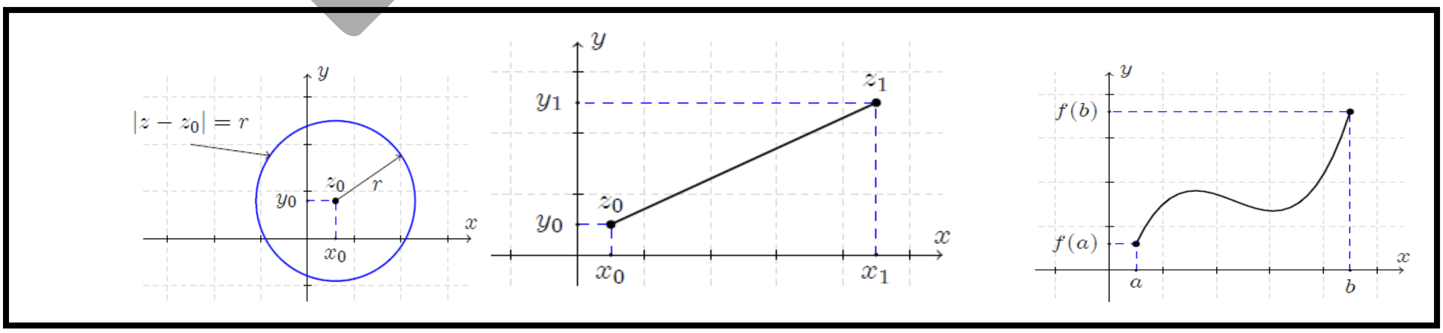
Segments :

Le segment de droite reliant deux points complexes z_0 et z_1 est l'ensemble des points :

$$\{z \in \mathbb{C}: z = (1-t)z_0 + tz_1; t\} \in [0,1]$$

Courbes :

En général, une courbe $y = f(x), x \in [a,b]$ ou f est une fonction continue, correspond à l'ensemble de points : $\{z = x + if(x) = (x, f(x)), x \in [a,b]\}$



0.4. Formes d'écriture des nombres complexes :

0.4.1. **Forme algébrique** : l'écriture $z = x + iy$ s'appelle la forme algébrique de z ou encore forme cartésienne.

0.4.2. **Forme trigonométrique** : l'écriture $z = |z|.[\cos(argz) + i\sin(argz)] = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ s'appelle forme trigonométrique de z ou encore forme polaire.

0.4.3. **Forme exponentielle** : l'écriture $z = |z|.e^{iarg(z)} = r.e^{i\theta}$ est appelée forme exponentielle de z.

Exemples :

Déterminez une forme trigonométrique de $z = -2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

$$z = -2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right) z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{5} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5} + \pi\right)\right)$$

$$z = 2\left(\cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}\right)$$

Le module de z est r=2 ; l'argument de z est $\theta = \frac{6\pi}{5}$; l'argument principal est $\theta_0 = \frac{6\pi}{5} - 2\pi = -\frac{4\pi}{5}$.

0.4.4. **Formules de Moivre et formules d'Euler** :

a. Formules de Moivre : pour tout nombre complexe $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$; $n \in \mathbb{Z}$.

b. Formules d'Euler :

On sait que : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ $\quad et \quad$ $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \text{ pour tout } \theta \in \mathbb{R}.$$

0.4.5. Racines d'un nombre complexe :

Soit n un entier positif, d'après la formule de Moivre :

$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin(\frac{\theta + 2k\pi}{n})$, k=0, 1, 2…….n-1.

D'où il résulte qu'il y a n racines différentes de z.

Exemple :

Calculer : $\sqrt[3]{1 - i}$

$$\sqrt[3]{1 - i} = (1 - i)^{1/3} = \left\{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right\}^{1/3} = \sqrt{2}^{1/3}\left\{\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right)\right\}$$

$$= \sqrt[6]{2}\left\{\cos\left(\frac{-\pi + 2k\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi + 2k\pi}{12}\right)\right\}$$

k=0, 1, 2.

Exercices

1. Donner la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + (3+2i)^4 \quad , \quad z_2 = -\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7} \quad , \quad z_3 = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^8 \ .$$

2. A quelle condition $z^2 + z + 1$ est-il réel ? Imaginaire pur ?
3. Donner le module et un argument des nombres complexes suivants, ainsi que leurs conjugués :

$$z_4 = 1 + i\ , \quad z_5 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}}\ , \quad z_6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\ , \quad z_7 = \sqrt{2}\cdot i^7\ , \quad z_8 = (5+i)^6\ , \quad z_9 = \frac{2e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{\frac{-3i\pi}{4}}}\ .$$

4. Ecrire sous forme algébrique :

$$z_{10} = \left[5\ ,\frac{3\pi}{4}\right], \quad z_{11} = \left(2e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(e^{\frac{-3i\pi}{4}}\right)\ , \quad z_{12} = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2\ , \quad z_{13} = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{10}\ , \quad z_{14} = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}\ .$$

5. Ecrire sous forme trigonométrique :

$$z_{15} = \left(1+i\sqrt{3}\right)^5, \quad z_{16} = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{3}-2i}}\ , \quad z_{17} = 2e^{-\frac{2\pi i}{3}}, \quad z_{18} = \left(1+i\sqrt{3}\right)^{4i}\ ,$$

$$z_{19} = -3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad z_{20} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

6. Ecrire sous forme exponentielle :

$$z_{21} = -\frac{2}{1-i\sqrt{3}}\ , \quad z_{22} = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad z_{23} = (\sin\alpha + i\cos\alpha)^n\ ,\ n\in\mathbb{N}.$$

7. Donner les racines de l'équation $z^3 = 16(1+i)$ sous deux formes (polaire et algébrique).
8. Trouver les racines cinquièmes de : $z_{24} = i$ et $z_{25} = \left(1+i\sqrt{3}\right)^{11}$.
9. Calculer les racines carrées de $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$.
10. Représenter dans le plan complexe les ensembles suivants :

$A = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| = |z-i|\}$

$B = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 2\right\}$

$C = \{z \in \mathbb{C} :\ |z-1| > |z-2|\}$

11. Déterminer parmi les ensembles suivants ceux qui sont ouverts, fermés, bornés et connexes :

D= $\{z \in \mathbb{C} :\ |z-1| < |z+1|\}$

E= $\{z \in \mathbb{C} :\ |z-a| \geq 1\}$.