Chapitre 1 : Fonctions complexes

Contenu

1.1. Fonction complexe d'une variable complexe :

Définition : soit $D \subset \mathbb{C}$, on appelle fonction d'une variable complexe une application

$$f : \begin{array}{l} D \to \mathbb{C} \\ z \to f(z) \end{array}$$

à chaque nombre complexe $z \subset D$ est associé un nombre complexe w appelé la valeur de *f* au point *z*, dénotée par $f(z)$.

$$w = f(z)$$

La région D est appelée l'ensemble de définition de *f*.

Exemple 1 : Voici quelques fonctions complexes et leurs domaines de définitions :

(1) $f_1(z) = z^2, D_{f_1} = \mathbb{C}$	(4) $f_4(z) = \sinh z, D_{f_4} = \mathbb{C}$
(2) $f_2(z) = \operatorname{Im} z, D_{f_2} = \mathbb{C}$	(5) $f_5(z) = \|z\|^2, D_{f_5} = \mathbb{C}$
(3) $f_3(z) = \operatorname{Arg} z, D_{f_3} = \mathbb{C}$	(6) $f_6(z) = \dfrac{z+1}{z^2+1}, D_{f_6} = \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$

Partie imaginaire et partie réelle d'une fonction complexe :

Si $w = u + iv$ est la valeur de f au point $z = x + iy$, alors on peut écrire

$$w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Chacun des nombres réels u et v dépend de deux variables réelles x et y. Si $v(x,y) = 0$ pour tout x, y, alors la fonction $f(z)$ est réelle, comme par exemple $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$. Si $z = re^{i\theta}$, alors on peut écrire

$$w = f(z) = f(re^{i\theta}) = u(r,\theta) + iv(r,\theta).$$

Exemple 2 : Si $f(z) = z^2$, alors

$$f(x+iy) = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy).$$

Donc

$$u(x,y) = x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(f) \quad \text{et} \quad v(x,y) = 2xy = \mathrm{Im}(f).$$

Si on utilise la forme polaire de z, on obtient

$$f(re^{i\theta}) = (re^{i\theta})^2 = r^2 e^{i2\theta} = r^2\cos(2\theta) + ir^2\sin(2\theta).$$

Donc

$$u(r,\theta) = r^2\cos(2\theta) = \mathrm{Re}(f) \quad \text{et} \quad v(r,\theta) = r^2\sin(2\theta) = \mathrm{Im}(f).$$

1.2. Fonctions uniformes et multiformes :

- Une fonction f est appelée **uniforme** si à chaque valeur de z ne correspond qu'une seule valeur de $f(z)$.
- Une fonction f est appelée **multiforme si à chaque valeur** de z correspond plusieurs valeurs de $f(z)$.
- Une fonction multiforme peut être considérée comme un ensemble de fonctions uniformes, chaque élément de cet ensemble étant appelé une branche (ou une détermination) de la fonction.

Remarque :

On choisit habituellement un élément comme branche principale, ainsi est appelée **détermination principale**.

Exemple 3 :

Si $w = f(z) = z^2$, à toute valeur de z il correspond une seule valeur de w. Donc $f(z) = z^2$ est une fonction uniforme de z.

Exemple 4 :

La fonction $z \mapsto f(z) = \sqrt{z}$ *est une fonction multiforme, en effet ;*

$$z = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z},$$
$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right)} = \sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}+k\pi i}, \quad k = 0, 1.$$
$$f(z) = \pm\sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}.$$

1.3 Fonctions inverses (réciproques):

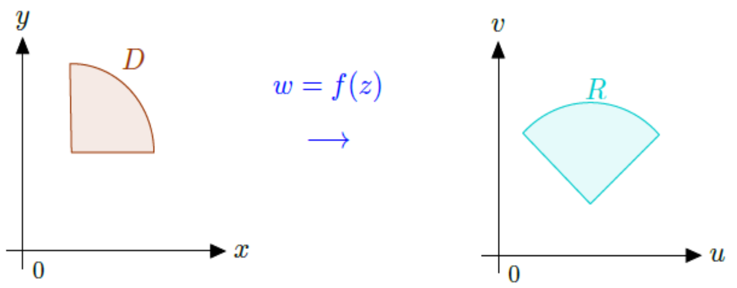
Si $w = f(z)$, on peut aussi considérer z comme fonction de w, ce qui peut s'écrire sous la forme $z = g(w) = f^{-1}(w)$. La fonction f^{-1} est appelée la fonction inverse de f.

1.4. Transformation complexe :

Soient $z = x+iy$ et $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$. Soit D le domaine de définition des fonctions u et v. Le système des équations

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

décrit une transformation ou une application de D dans le plan (x,y) vers le plan (u,v).



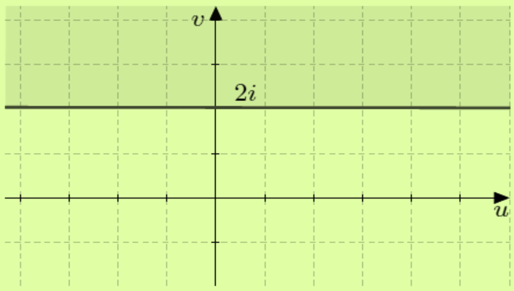
Exemple 5 :

Soit $f(z) = iz$. *Trouver l'image du demi-plan* $Re(z) \geq 2$ *par* f.

Soit $z = x + iy \Rightarrow iz = -y + ix$

$Re(z) \geq 2 \Rightarrow x > 2$ *et* $y \in]-\infty, +\infty[$

$$\begin{cases} u = u(x,y) = -y \\ v = v(x,y) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v \geq 2 \\ -\infty < u < +\infty \end{cases}$$



1.5. Limites d'une fonction complexe :

Définition : On dit que la fonction $f(z)$ tend vers la limite l quand $z \to z_0$, et on note $lim_{z \to z_0} = l$, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tel que, } \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon.$$

Propriétés :

1. Si $\lim_{z \to z_0} f(z) = l$ existe alors la limite suivant tous les chemins existe et égale à l.
2. Si, suivant deux chemins différents, les limites sont différentes alors $\lim_{z \to z_0} f(z)$ n'existe pas.
3. Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ et $\lim_{z \to z_0} f(z) = a + ib$ alors $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} Re(z) = a$ et $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} Im(z) = b$.
4. Soient f et g deux fonctions complexes telles que $\lim_{z \to z_0} f(z) = l$ et $\lim_{z \to z_0} g(z) = l_1$, existent, alors :
   a) $\lim_{z \to z_0} (f(z) + g(z)) = l + l_1$.
   b) $\lim_{z \to z_0} (f(z) - g(z)) = l - l_1$.
   c) $\lim_{z \to z_0} f(z)g(z) = ll_1$.
   d) $\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{l}{l_1}$, avec $l_1 \neq 0$.

Exemple 6 : Montrez que $\lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z}$ n'existe pas.

Si $z = x + iy$,

alors suivant le chemin $y = 0$, on a $z = x$ et donc

$$\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z} = \lim_{x\to 0} \frac{\overline{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1,$$

suivant le chemin $x = 0$,on a $z = iy$, et donc

$$\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z} = \lim_{iy\to 0} \frac{\overline{iy}}{iy} = \lim_{iy\to 0} \frac{-iy}{iy} = -1.$$

D'après la propriété (2) la limite n'existe pas.

1.6. Continuité d'une fonction complexe :

Définition :

On dit qu'une fonction f est continue en z_0 si $f(z_0)$ existe et $f(z) \to f(z_0)$ lorsque $z \to z_0$.

Proposition :

- Soit $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ alors la fonction f est continue en $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si les fonctions $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont continues en (x_0, y_0).
- Une fonction *f* est dite continue dans une région du plan complexe si elle est continue en tous les points de cette région.
- Si f et g sont deux fonctions continues en z_0, alors les fonctions :

$$(a)\ f+g, \qquad (b)\ fg, \qquad (c)\ f\circ g \qquad (d)\ \frac{f}{g}\ si\ g(z_0)\neq 0$$

Sont continues en z_0 .

- Les fonctions polynômiales sont continues sur $\mathbb{C}$.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur leurs domaines de définition.

Exemple 7 :

(1) La fonction $f(z) = \overline{z} = x - iy$ est continue sur $\mathbb{C}$ car les fonction $u(x,y) = x$ et $v(x,y) = -y$ sont continues en tout point $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{C}$.

(2) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ si $z \neq i$ et $f(z) = 0$ si $z = i$.
Cette fonction est discontinue en $z_0 = i$ car $\lim_{z\to i} f(z) = -1 \neq f(i) = 0$.

(3) La fonction $f(z) = \dfrac{z}{1+z^2}$ est continue en tout point z_0 de $\mathbb{C}$ sauf en $z_0 = \pm i$.

1.7.Fonctions élémentaires :

A. Polynômes et fractions rationnelles :

Si $n \in \mathbb{N}$, et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des constantes complexes, la fonction

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \quad (a_n \neq 0)$$

est un polynôme de degré n. Le domaine de définition de $p(z)$ est $\mathbb{C}$ le plan des nombres complexes tout entier.
Les quotients de polynômes sont appelés fractions rationnelles

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}$$

$r(z)$ est définie en tout point $z \in \mathbb{C}$ sauf aux points où $q(z) = 0$.

B. Fonction exponentielle complexe :

Définition : on définit la fonction exponentielle complexe qu'on note e^z par

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Cette série a un rayon de convergence infini.

Si $z = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{iy}$ **,** alors

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

- **Partie réelle et partie imaginaire de l'exponentielle :**

Posons $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$; $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(cosy + isiny)$

D'où l'on a : $\begin{cases} Re(e^z) = e^x cosy \\ Im(e^z) = e^x siny \end{cases}$

- **Périodicité de l'exponentielle :**

Les deux fonctions sinus et cosinus étant périodiques de période 2π, on a :

$$e^z = e^x(cosy + isiny) = e^x\big(\cos(y + 2k\pi) + i\sin(y + 2k\pi)\big)$$

$$= e^x e^{i(y+2k\pi)} = e^{(x+iy)+2k\pi i} = e^{z+2k\pi i}$$

D'où,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall k \in \mathbb{Z}, e^z = e^{z+2k\pi i}.$$

La fonction exponentielle est périodique de période $2\pi i$.

- **<u>Module et argument de l'exponentielle</u> :**

Soit $z = x + iy,\ \ x, y \in R,$

$$e^z = e^x(cosy + isiny) \Rightarrow \begin{cases} |e^z| = e^x = e^{Re(z)} \\ \arg(e^z) = y\,[2\pi] = Im(z)[2\pi] \end{cases}$$

Remarque :

$$\forall z \in C, \quad e^z \neq 0;\ e^{-z} = \frac{1}{e^z}$$

Exemple 8 : résoudre dans C : $e^z = -a\,,\ \ a > 0$ **.**

Soit $z = x + iy,$ avec $x, y \in \mathbb{R}$,

$$e^z = e^x(cosy + isiny) = -a = a.(-1) = a(\cos(\pi) + isin(\pi))$$

Par identification : $\begin{cases} e^x = a \\ \begin{cases} cosy = \cos(\pi) \\ siny = \sin(\pi) \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = lna \\ y = \pi + 2k\pi,\ \ k \in Z \end{cases}$

D'où l'ensemble de solutions en z :

$$z = lna + i(2k+1)\pi \quad , \quad k \in Z$$

C. Fonctions circulaires et hyperboliques :

- **Fonctions trigonométriques :**

Nous définirons les fonctions trigonométriques ou circulaires $\sin z$, $\cos z$,etc., à l'aide des fonctions exponentielles de la manière suivante :

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} \qquad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} \qquad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

La plupart des propriétés des fonctions trigonométriques réelles sont encore valables dans le cas complexe. Ainsi par exemple

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 z = \sec^2 z \qquad 1 + \operatorname{cotg}^2 z = \operatorname{cosec}^2 z$$

$$\sin(-z) = -\sin z \qquad \cos(-z) = \cos z \qquad \operatorname{tg}(-z) = -\operatorname{tg} z$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$$

$$\operatorname{tg}(z_1 \pm z_2) = \frac{\operatorname{tg} z_1 \pm \operatorname{tg} z_2}{1 \mp \operatorname{tg} z_1 \operatorname{tg} z_2}$$

➢ **Fonctions hyperboliques :**

Les fonctions hyperboliques sont définies comme suit :

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\operatorname{ch} z} = \frac{2}{e^z + e^{-z}} \qquad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\operatorname{sh} z} = \frac{2}{e^z - e^{-z}}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \qquad \operatorname{coth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}.$$

Les propriétes suivantes sont encore vérifiées :

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1 \qquad 1 - \operatorname{th}^2 z = \operatorname{sech}^2 z \qquad \operatorname{coth}^2 z - 1 = \operatorname{csch}^2 z$$

$$\operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z \qquad \operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z \qquad \operatorname{th}(-z) = -\operatorname{th} z$$

$$\operatorname{sh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$$

$$\operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$$

$$\operatorname{th}(z_1 \pm z_2) = \frac{\operatorname{th} z_1 \pm \operatorname{th} z_2}{1 \pm \operatorname{th} z_1 \operatorname{th} z_2}$$

Les fonctions trigonométriques et les fonctions hyperboliques sont liées par les relations suivantes :

$$\sin iz = i \operatorname{sh} z \qquad \cos iz = \operatorname{ch} z \qquad \operatorname{tg} iz = i \operatorname{th} z$$

$$\operatorname{sh} iz = i \sin z \qquad \operatorname{ch} iz = \cos z \qquad \operatorname{th} iz = i \operatorname{tg} z$$

Exemple 9 : Donnez la partie réelle , la partie imaginaire et le module de $\sin z$ et $\cos z$

Posons $z = x + iy \;;\; x, y \in R$ il vient :

$$\cos z = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$$

$$\sin z = \sin x \cos iy + \sin iy \cos x = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$$

D'où l'on tire : $\begin{cases} Re(\sin z) = \sin x \operatorname{ch} y \\ Im(\sin z) = \cos x \operatorname{sh} y \end{cases}$, $\begin{cases} Re(\cos z) = \cos x \operatorname{ch} y \\ Im(\cos z) = -\sin x \operatorname{sh} y \end{cases}$

$$\begin{aligned}
|\sin(z)| &= \sqrt{\sin^2(x)\mathrm{ch}^2(y)+\cos^2(x)\mathrm{sh}^2(y)} \\
&= \sqrt{\sin^2(x)(1+\mathrm{sh}^2(y))+\cos^2(x)\mathrm{sh}^2(y)} \\
&= \sqrt{\sin^2(x)+\mathrm{sh}^2(y)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\cos(z)| &= \sqrt{\cos^2(x)\mathrm{ch}^2(y)+\sin^2(x)\mathrm{sh}^2(y)} \\
&= \sqrt{\cos^2(x)(1+\mathrm{sh}^2(y))+\sin^2(x)\mathrm{sh}^2(y)} \\
&= \sqrt{\cos^2(x)+\mathrm{sh}^2(y)} .
\end{aligned}$$

Remarque : dans le domaine complexe les fonctions sinus et cosinus ne sont pas bornées.

D. Logarithme complexe :

La fonction $f(z) = \mathrm{Log}\, z,\ z \neq 0$ est définie comme l'inverse de la fonction exponentielle e^z.

$$w = \mathrm{Log}\, z \Leftrightarrow z = e^w.$$

Question : Pour un nombre complexe z donné, le nombre w qui vérifie $z = e^w$ est-il unique?

Réponse : Posons $z = x + iy$ et $w = u + iv$. On a

$$\begin{aligned}
z = e^w \quad &\Leftrightarrow \quad x + iy = e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \sin v) \\
&\Leftrightarrow \quad \{|z| = e^u \ \text{ et } \ v = \mathrm{Arg}\, z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

D'où w n'est pas unique car

$$w = \mathrm{Log}\, z = u + iv = \ln|z| + i(\mathrm{Arg}\, z + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Proposition 1 :

La fonction $\mathrm{Log}\, z$, $z \neq 0$ est une fonction multiforme définie par

$$\begin{aligned}
\mathrm{Log}\, z &= \ln|z| + i \arg z \\
&= \ln|z| + i(\mathrm{Arg}\, z + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z},\ \text{où } -\pi < \mathrm{Arg}\, z \leq \pi.
\end{aligned}$$

Proposition 2 :

La détermination principale ou valeur principale de Log z est souvent définie par :

$$\mathrm{Log}\, z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z,\ \text{ où } \ -\pi < \mathrm{Arg}\, z \leq \pi.$$

Remarque : La détermination principale est obtenue pour *k*=0.

Les propriétés suivantes sont vérifiées (modulo [2pi]) :

$$\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 \quad ; \quad \operatorname{Log}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Log} z_1 - \operatorname{Log} z_2 \quad ; \quad \operatorname{Log}(z^n) = n \operatorname{Log} z.$$

Exemple 10 : Ecrire les nombres suivants sous la forme *a+ib*

$$\text{(a) } \log 4 \qquad \text{(b) } \log(-1) \qquad \text{(c) } \log(1+i)$$

(a) $\log 4 = \ln 4 + i \arg(4) = \ln 4 + i2k\pi.$
(b) $\log(-1) = \ln 1 + i \arg(-1) = i(2k+1)\pi$
(c) $\log(1+i) = \ln|1+i| + i \arg(1+i) = \ln\sqrt{2} + i(\pi/4 + 2k\pi).$

Exemple 11 : Calculez la détermination principale du logarithme complexe log z pour :

$$\text{(a) } z = i \qquad \text{(b) } z = 1+i \qquad \text{(c) } z = -2$$

(a) $\operatorname{Log}(i) = \ln|i| + i \operatorname{Arg}(i) = i\frac{\pi}{2},$
(b) $\operatorname{Log}(1+i) = \ln|1+i| + i \operatorname{Arg}(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4},$
(c) $\operatorname{Log}(-2) = \ln 2 + i \operatorname{Arg}(-2) = \ln 2 + i\pi.$

Exemple 12 : résoudre dans C l'équation : $i = e^{iz} - (1+i)e^{-iz}$

$$e^{iz} - (1+i)e^{-iz} = i \iff e^{2iz} - ie^{iz} - (1+i) = 0,$$

posons $X = e^{iz}$, on obtient

$$\begin{aligned}
& X^2 - iX - (1+i) = 0, \\
& \Delta = 3 + 4i, \\
& X_1 = 1+i, \; X_2 = -1 \\
\Rightarrow \quad & e^{iz} = 1+i \;\vee\; e^{iz} = -1, \\
\Rightarrow \quad & iz = \ln(1+i) \;\vee\; iz = \ln(-1), \\
\Rightarrow \quad & iz = \ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i \;\vee\; iz = (2k+1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}, \\
\Rightarrow \quad & z = -i\ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \;\vee\; z = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Exercices

1. Calculez les limites suivantes si elles existent :

$$\lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}^2-z^2}{z}=0,\quad \lim_{z\to 0}\frac{|z|^2}{z},\quad \lim_{z\to 0}\frac{z}{|z|},\quad \lim_{z\to -2i}\frac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4}.$$

2. Montrez les formules suivantes :

$$\cos(iz)=\cosh(z),\qquad \sin(iz)=i\sinh(z).$$

3. Montrez que sin(z) et cos(z) ne sont pas bornés dans C.
4. Calculez :

$$1)\ \sin(1-i),\quad 2)\ \ln(-1),\quad 3)\ 2^i,\quad 4)\ \ln(1+i),\quad 5)\ i^i,$$
$$6)\ \arcsin(i),\quad 7)\ (\cos(i))^i,\quad 8)\ (-1)^{\sqrt{2}}.$$

5. Résoudre dans ℂ les équations suivantes :

$e^z=1+i$, $1+2i=e^{-iz}+2i\sin z,$ $e^{2z+4}=3\sqrt{3}+3i,$ $z^2=3+4i,$

6. Montrez que :

$$\arctan(z)=\frac{i}{2}[\ln(i+z)-\ln(i-z)].$$

7. Donnez la détermination principale de :

   1) $log(1+i)$, 2) $log(-1)$, 3) $log(-1-i)$.

8. Etudier la continuité des fonctions complexes suivantes :

   1) $f(z)=\sin\bar{z}$ 2) $f(z)=z^3$ 3) $f(z)=\frac{|z|}{z}$.

9. Séparez les parties réelles et imaginaires des fonctions suivantes :

$$\text{a) } f(z)=e^{-z},\ \text{b) } f(z)=\sin z,\ \text{c) } f(z)=\mathrm{Ch}\, z,\ \text{d) } f(z)=2^{z^2},\ \text{e) } f(z)=z^{2-i}.$$

10. Montrez les relations suivantes :

$$|\mathrm{Sh}\, z|=\sqrt{\mathrm{Ch}^2 x-\cos^2 y},$$

$$e^{(\mathrm{Log}\, z)}=z$$

$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$$

11. Trouvez les valeurs de :

$$4\ \mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{3}i\right)\ \text{ et }\ \mathrm{ch}\left(\frac{\pi}{2}i\right).$$