Corrigé type du TD N°1 M3
2019/2020

Exo 2 :

1)
- $\int_0^1 \int_1^2 xy \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\int_1^2 xy \, dx \right] dy =$

$\int_0^1 \left[y . \frac{x^2}{2} \right]_1^2 dy = \int_0^1 \left[\frac{y}{2}(4-1) \right] dy = \frac{3}{2} \int_0^1 y \, dy =$

$\frac{3}{2} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{4}(1-0) = \frac{3}{4}$

- $\int_1^2 \int_0^1 xy \, dy \, dx = \int_1^2 \left[\int_0^1 xy \, dy \right] dx =$

$\int_1^2 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_0^1 dx = \int_1^2 \left[\frac{x}{2}(1-0) \right] dx = \frac{1}{2} \int_1^2 x \, dx =$

$\frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{1}{4}(4-1) = \frac{3}{4}$

Conclusion : quand les bornes d'intégration sont fixes intégrer en premier par rapport à y et ensuite par rapport à x ou intégrer en premier par rapport à x puis par rapport à y cela donne le même résultat.

- $\int_0^1 \int_1^2 x y \, dx \, dy = \left(\int_1^2 x \, dx \right) . \left(\int_0^1 y \, dy \right) =$

$\left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 . \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \left[\frac{1}{2}(4-1) \right] \left[\frac{1}{2}(1-0) \right] = \left(\frac{3}{2} \right) . \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

quand les bornes d'intégration sont fixes et les variables de la fct sont séparables on peut calculer l'intégral par un produit.

2) • $\int_0^1 \int_y^{y+1} x^2 y \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\int_y^{y+1} x^2 y \, dx \right] dy =$ Chemin obligatoire

$\int_0^1 \left[y \cdot \frac{x^3}{3} \right]_y^{y+1} dy = \int_0^1 \left(\frac{y \cdot (y+1)^3}{3} - \frac{y \cdot y^3}{3} \right) dy =$

$\int_0^1 \left(\frac{y^4}{3} + \frac{3y^3}{3} + \frac{3y^2}{3} + \frac{y}{3} - \frac{y^4}{3} \right) dy =$ $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

$\int_0^1 \left(y^3 + y^2 + \frac{1}{3} y \right) dy =$

$\left[\frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{4}$

• $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_0^x e^{y/x} \, dy \, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[\int_0^x e^{y/x} \, dy \right] dx =$ Chemin obligatoire

$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[x \, e^{y/x} \right]_0^x dx =$

$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[x e^{\frac{x}{x}} - x e^{\frac{0}{x}} \right] dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x(e-1) \, dx =$

$(e-1) \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \left(\frac{e-1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{8}(e-1)$

N.B. : $\int_0^x e^{y/x} \, dy \rightarrow$ de la forme $\int f' e^f = e^f$

$f = \frac{y}{x}$ et $f' = \frac{1}{x}$

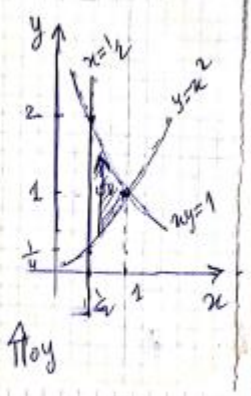
3) $\iint_{\mathcal{D}} dx\,dy$ mesure l'aire de la zone $\mathcal{D}$.

Tout d'abord Calculons les pts d'intersection des Courbes qui délimitent $\mathcal{D}$:

$$\begin{cases} xy = 1 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (1,1)$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}\right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = \left(\tfrac{1}{2}, 2\right)$$



- $1^{ère}$ méthode :

Intégrer selon oy :

$$\iint_{\mathcal{D}} dx\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{x^2}^{\frac{1}{x}} dy\,dx = \quad A_{oy}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[\int_{x^2}^{1/x} dy \right] dx = \int_{1/2}^{1} [y]_{x^2}^{1/x} \cancel{dy}\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[\frac{1}{x} - x^2\right] dx =$$

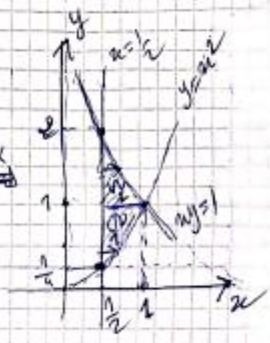
$$\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{x} - \int_{1/2}^{1} x^2\,dx = \left[\ln x - \frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \ln 2 - \frac{7}{24}$$

2ème méthode :

intégrer selon ox

$$\iint_{\Omega} dx\,dy = \iint_{\Omega_1} dx\,dy + \iint_{\Omega_2} dx\,dy =$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{1}\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} dx\,dy + \int_{1}^{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1/y} dx\,dy =$$



$$\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left[\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} dx\right]dy + \int_{1}^{2}\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1/y} dx\right]dy =$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left[\sqrt{y}-\frac{1}{2}\right]dy + \int_{1}^{2}\left[\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\right]dy =$$

$$\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}y\right]_{\frac{1}{4}}^{1} + \left[\ln y-\frac{1}{2}y\right]_{1}^{2} = \ln 2 - \frac{7}{24}$$

Conclusion :

Expliquez aux étudiants la différence entre un domaine régulier et irrégulier.

Dans ce cas : le domaine est régulier en y et irrégulier en x

4) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx$: l'ordre d'intégration est : selon oy.

domaine d'intégration :

$$\begin{cases} x = 1 \quad , \quad x = -1 \\ y = 0 \quad , \quad y = \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

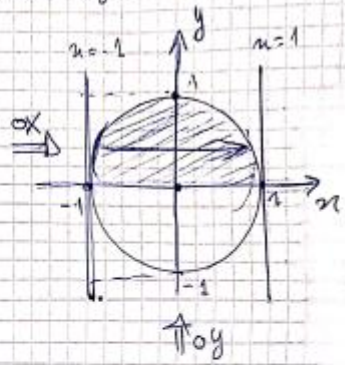
selon oX :

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \end{cases}$$

donc :

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx \rightarrow$$

$$\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$



N.B. : $y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2 = 1-x^2 \Rightarrow x^2 = 1-y^2$

$x = \pm\sqrt{1-y^2}$

$x^2+y^2 = 1$: équation d'1 cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.