$$U_n = \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n \log n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n \log n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\log n} =$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 0 < 1 \Rightarrow$ la série converge.

N.B. : $n \to \infty$; $q^n = \begin{cases} \infty & \text{si } q > 1 \\ 0 & \text{si } q < 1 \end{cases}$

Exo 3 :

A. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1}$; $a_n = \frac{1}{2n-1} > 0$

Donc c'est bien une série alternée.

- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$
- $2n+1 > 2n-1 \Leftrightarrow \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n-1} \Leftrightarrow a_{n+1} < a_n$

  donc la suite (a_n) est décroissante.

D'après le critère de Leibniz, les conditions de convergence sont satisfaites, alors la série alternée $\sum (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1}$ est convergente.

$$U_n = \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n \log n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n \log n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\log n} =$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 0 < 1 \Rightarrow$ la série converge.

__N.B.__ : $n \to \infty$; $q^n = \begin{cases} \infty & \text{si } q > 1 \\ 0 & \text{si } q < 1 \end{cases}$

__Ex 3__ :

A. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1}$; $a_n = \frac{1}{2n-1} > 0$

Donc c'est bien une série alternée.

- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$
- $2n+1 > 2n-1 \Leftrightarrow \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n-1} \Leftrightarrow a_{n+1} < a_n$

donc la suite (a_n) est décroissante.

D'après le critère de Leibniz, les conditions de convergence sont satisfaites, alors la série alternée $\sum (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1}$ est convergente.

B. ①. $\sum (-1)^n \frac{n^3}{n!}$; $U_n = (-1)^n \cdot \frac{n^3}{n!}$

$|U_n| = \frac{n^3}{n!} = a_n \geq 0$

En utilisant le critère de D'Alembert ;

Scanned with CamScanner

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^3} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(n+1)^2 \cdot n!}{(n+1)n! \cdot n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{n^3} = 0 < 1$$

Donc $\sum U_n$ est absolument convergente $\Rightarrow$

$\sum (-1)^n \frac{n^3}{n!}$ est convergente (voir le théorème)

② • $\sum (-1)^n \sqrt{n} \cdot tg \frac{1}{n^2}$, $U_n = (-1)^n \cdot \sqrt{n} \cdot tg \frac{1}{n^2}$

$|U_n| = \sqrt{n}\, tg \frac{1}{n^2} = a_n \geq 0$

$tg \frac{1}{n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \Rightarrow a_n = \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$

$\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est c.v. (série de Riemann $\alpha = 3/2 > 1$)

Donc $\sum U_n$ est absolument convergente $\Rightarrow$
elle est c.v.

③ • $\sum (-1)^n \sqrt{n^2+1} - n$; $U_n = (-1)^n \sqrt{n^2+1} - n$

• $a_n = |U_n| = \sqrt{n^2+1} - n = \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} =$

$\frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} \sim \frac{1}{2n}$ et comme $\sum \frac{1}{2n}$ est D.V.,
(série harmonique) donc la série de terme général
a_n diverge aussi.

• $\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1} + n+1} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} \Rightarrow a_{n+1} < a_n$

donc (a_n) est décroissante.

• $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0$

Donc la série est convergente d'après le critère de Leibniz.

Conclusion :

$\begin{cases} \sum |(-1)^n \sqrt{n^2+1}+n| \text{ est divergente} \\ \sum (-1)^n \sqrt{n^2+1}+n \text{ est convergente (Leibniz)} \end{cases}$

donc la série alternée donnée est semi-CV.

Ex 4 :

B. ① $\sum_{n\geq 0} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$

série géométrique de raison $r = x$ converge pour $|x| < 1$ c'd $-1 < x < 1$ c'd $x \in]-1,1[$.

Donc $D_c =]-1,1[$

Aux bornes :

$x = -1$: $\sum x^n = \sum (-1)^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ pair} \\ -1 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$

série divergente c'd $-1 \notin D_c$

$x = 1$; $\sum x^n = \sum 1$; $\lim_{n\to\infty} U_n = 1 \neq 0 \Rightarrow$

série divergente c'd $1 \in D_c$

Donc $D_c =]-1,1[$

② $\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n 2^{nx}$; $U_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 2^{nx} > 0$

Appliquons le critère de Cauchy :

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}+1\right)^n \cdot 2^{nx}} = 2^x$

la série converge pour $2^x < 1 \Rightarrow x \ln 2 < \ln 1$

$\Rightarrow x < 0$ c'à'd $D_c =]-\infty, 0[$

Aux bornes :

$x=0$: $\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$

Donc la série diverge.

D'où $0 \notin D_c \Rightarrow D_c =]-\infty, 0[$.

A. ① $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \cdot x^n$; $a_n = \frac{1}{n!}$

Utilisons le critère de D'Alembert :

$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{(n+1)!} \cdot n!\right| =$

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{n!}{(n+1)\, n!}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

$\frac{1}{R} = 0 \Rightarrow R = +\infty$. La série est absolument convergente pour $|x| < R = +\infty$

c'à'd $x \in \mathbb{R} \Rightarrow D_c =]-\infty, +\infty[$.

Rq : Changer l'exemple ② de l'exo 4 par $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$

② $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$; $a_n = \frac{1}{n}$

$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+1}\right| = 1 \Rightarrow R = 1$

la série est abs-C.V. pour $|x|<1 \Rightarrow D_c =]-1,1[$.

AUX bornes :

$x=-1$: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est C.V. (série harmonique alternée)

$x = 1$: $\sum \frac{1}{n}$ est D.V. (série harmonique)

D'où ; $D_c = [-1, 1[$

---

③. $\sum_0^\infty (3+(-1)^n . 2^{n-1}) x^n = \sum_{n\geq 0} 3 . x^n + \sum_{n\geq 0} (-1)^n . 2^{n-1} . x^n$

$= \sum a_{n1} x^n + \sum a_{n2} x^n$

Utilisons le critère de Cauchy :

①
$1/R_1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n1}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = \lim_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow R_1 = 1$

② $\frac{1}{R_2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n2}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} (2^{n-1})^{1/n} =$

$\lim_{n\to\infty} 2 . 2^{-\frac{1}{n}} = 2 \Rightarrow R_2 = \frac{1}{2}$

$R_c = \inf(R_1, R_2) = \inf(\frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{2}$

Domaine de convergence D_c :

$|x| < R_c \Rightarrow |x| < \frac{1}{2} \Rightarrow D_c =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.