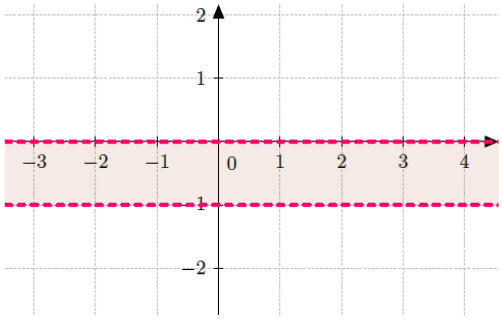
Corrigé type TD 1

Exercice 1 :

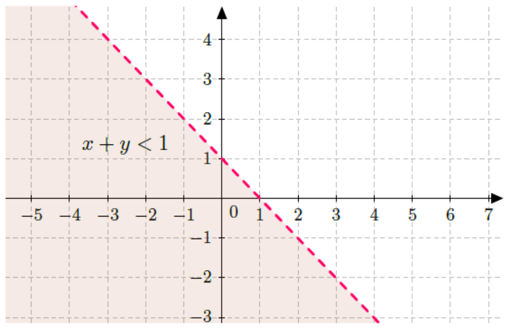
1.

$0 < Re(iz) < 1$, on a $iz = i(x+iy) = ix - y$ donc $0 < -y < 1 \Rightarrow -1 < y < 0$. L'ensemble de points est l'intersection des deux demi-plans $y < 0$ et $y > -1$ (une bande).



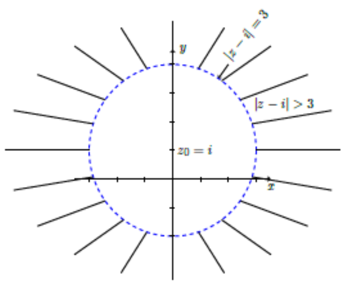
2.

$Re(z)+Im(z) < 1 \Rightarrow x+y < 1$, ainsi l'ensemble de points est le demi-plan $x+y<1$.



3.

L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z-i| > 3\}$ est l'extérieur du cercle de centre $z_0 = i \equiv (0,1)$ et de rayon $r = 3$, le cercle non compris.



Exercice 2

A.

La limite de $u(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ quand $(x,y) \to (0,0)$ n'existe pas, en effet ;
si on pose $y = x$ on obtient

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2},$$

et si on pose $y = -x$ on obtient

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{x^2+x^2} = -\frac{1}{2}.$$

B. 1.

$\lim_{z\to 0} \frac{z}{|z|}$ n'existe pas, en effet ;

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{|z|} = \lim_{z\to 0} \frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

fixons $y = 0$,

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{|z|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|} \quad \text{n'existe pas car}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1.$$

2.

$$\lim_{z\to -2i} \frac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4} = \frac{\lim_{z\to -2i}(2z+3)\lim_{z\to -2i}(z-1)}{\lim_{z\to -2i}(z^2-2z+4)} = -\frac{1}{2} + \frac{11}{4}i$$

3.

$$\lim_{z\to -i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2z}+1}{e^z+i} = \frac{e^{-i\pi}+1}{e^{-i\frac{\pi}{2}}+i} = \frac{-1+1}{-i+i} = \frac{0}{0} \text{ forme indéterminée.}$$

Par décomposition de numérateur $e^{2z}+1 = (e^z)^2 - i^2 = (e^z - i)(e^z + i)$ nous voyons que

$$\lim_{z\to -i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2z}+1}{e^z+i} = \lim_{z\to -i\frac{\pi}{2}} \frac{(e^z-i)(e^z+i)}{e^z+i} = e^{-i\frac{\pi}{2}} - i = -2i.$$

4.

$\mathbf{lim}_{n\to\infty} \; \frac{ni^n}{n+1}$ n'existe pas : les valeurs adhérentes de cette suite sont en effet les nombres -1, -i 1 et i.

Exercice 3

A. 1.

$$\mathrm{Log}(2+7i) = \mathrm{Log}\,|2+7i| + i\,\mathrm{Arg}(2+7i) = \mathrm{Log}\,\sqrt{4+49} + i\left(\mathrm{Arctg}\,\frac{7}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$= \mathrm{Log}\,\sqrt{53} + i\left(\mathrm{Arctg}\,\frac{7}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2.

$$\begin{aligned}(2i)^{2i} &= e^{2i\log(2i)} \\ &= e^{2i(\log 2 + i\pi/2)} \\ &= e^{i2\log 2}e^{-\pi} \\ &= e^{-\pi}\left[\cos(2\log 2) + i\sin(2\log 2)\right].\end{aligned}$$

3.

$$4\,\mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{3}i\right) = 4\frac{e^{\frac{\pi}{3}i} - e^{-\frac{\pi}{3}i}}{2} = 2\left\{\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3} - \left(\cos\tfrac{\pi}{3} - i\sin\tfrac{\pi}{3}\right)\right\} = 4i\sin\tfrac{\pi}{3} = 2i\sqrt{3}.$$

B.

$$\mathrm{Log}\,(-1-i) = \ln|-1-i| + i\,\mathrm{Arg}\,(-1-i) = \ln\sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}i.$$

Exercice 4

1. L'équation est équivalente à

$$i(e^{iz})^2 - e^{iz} - i = 0, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

On pose $X = e^{iz}$ et on obtient

$$iX^2 - X - i = 0, \qquad X \in \mathbb{C}.$$

On calcule le discriminent $\Delta = 1 - 4i(-i) = -3 = 3i^2$. Les solution sont données par

$$X_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2i} \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2i}.$$

Une réécriture conduit à

$$X_1 = \frac{-i - \sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{-i + \sqrt{3}}{2}.$$

La résolution en terme de la variable z donne

$$z_1 = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{-i-\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{-i+\sqrt{3}}{2}\right).$$

2.

$$2\cos(z) - e^{-iz} = 1 + 2i \qquad \Rightarrow \qquad 2\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} - e^{-iz} = 1 + 2i.$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}
e^{iz} = 1 + 2i \quad &\Rightarrow \quad iz = \log(1 + 2i),\\
&\Rightarrow \quad z = \frac{1}{i}\log(1 + 2i) = \frac{1}{i}\left(\ln(\sqrt{5}) + i\arctan(2) + 2k\pi i\right), \quad k \in \mathbb{Z},\\
&\Rightarrow \quad z = -i\ln(\sqrt{5}) + \arctan(2) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$