Résumé de cours M4

1. **Fonction complexe d'une variable complexe :**

Définition : soit $D \subset \mathbb{C}$, on appelle fonction d'une variable complexe une application

$$f : \begin{array}{l} D \to \mathbb{C} \\ z \to f(z) \end{array}$$

à chaque nombre complexe $z \subset D$ est associé un nombre complexe w appelé la valeur de f au point z, dénotée par $f(z)$.

$$w = f(z)$$

La région D est appelée l'ensemble de définition de f.

$$z = x + iy \ \in D \ , f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y), avec\ u(x, y)\ et\ v(x, y)$$

Sont respectivement partie **réelle** et partie **imaginaire** de $f(z)$.

2. **Fonctions uniformes et multiformes :**

- Une fonction f est appelée **uniforme** si à chaque valeur de z ne correspond qu'une seule valeur de $f(z)$.
- Une fonction f est appelée **multiforme si à chaque valeur** de z correspond plusieurs valeurs de $f(z)$.

3. **Limites d'une fonction complexe :**

Définition : On dit que la fonction $f(z)$ tend vers la limite l quand $z \to z_0$, et on note $lim_{z \to z_0} = l$, si et seulement si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tel que, } \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon.}$$

4. **Continuité d'une fonction complexe :**

Définition :

On dit qu'une fonction f est continue en z_0 si $f(z_0)$ existe et $f(z) \to f(z_0)$ lorsque $z \to z_0$.

5. **Fonctions usuelles :**

a. **Fonction exponentielle complexe :**

➢ **Définition :** on définit la fonction exponentielle complexe qu'on note e^z par

$$\boxed{e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)}$$

➢ **Partie réelle et partie imaginaire de l'exponentielle :**

Posons $z = x + iy$, avec $x, y \ \in \mathbb{R}$; $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(cosy + isiny)$

D'où l'on a : $\begin{cases} Re(e^z) = e^x cosy \\ Im(e^z) = e^x siny \end{cases}$

- **Périodicité de l'exponentielle :**

  Les deux fonctions sinus et cosinus étant périodiques de période 2π, on a :

$$e^z = e^x(cosy + isiny) = e^x\big(\cos(y + 2k\pi) + isin(y + 2k\pi)\big)$$

$$= e^x e^{i(y+2k\pi)} = e^{(x+iy)+2k\pi i} = e^{z+2k\pi i}$$

D'où,

$$\forall z \in \mathbf{C}, \forall k \in \mathbf{Z}, e^z = e^{z+2k\pi i}.$$

  La fonction exponentielle est périodique de période $2\pi i$.

- **Module et argument de l'exponentielle :**

Soit $z = x + iy,\ \ x, y \ \in R,$

$$e^z = e^x(cosy + isiny) \Rightarrow \begin{cases} |e^z| = e^x = e^{Re(z)} \\ \arg(e^z) = y\ [2\pi] = Im(z)[2\pi] \end{cases}$$

b. Fonctions trigonométriques :

Nous définirons les fonctions trigonométriques ou circulaires $\sin z$, $\cos z$,etc., à l'aide des fonctions exponentielles de la manière suivante :

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} \qquad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} \qquad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

La plupart des propriétés des fonctions trigonométriques réelles sont encore valables dans le cas complexe. Ainsi par exemple

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 z = \sec^2 z \qquad 1 + \operatorname{cotg}^2 z = \operatorname{cosec}^2 z$$

$$\sin(-z) = -\sin z \qquad \cos(-z) = \cos z \qquad \operatorname{tg}(-z) = -\operatorname{tg} z$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$$

$$\operatorname{tg}(z_1 \pm z_2) = \frac{\operatorname{tg} z_1 \pm \operatorname{tg} z_2}{1 \mp \operatorname{tg} z_1 \operatorname{tg} z_2}$$

c. <u>Fonctions hyperboliques</u> :

Les fonctions hyperboliques sont définies comme suit :

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\operatorname{ch} z} = \frac{2}{e^z + e^{-z}} \qquad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\operatorname{sh} z} = \frac{2}{e^z - e^{-z}}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \qquad \operatorname{coth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}.$$

Les propriétes suivantes sont encore vérifiées :

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1 \qquad 1 - \operatorname{th}^2 z = \operatorname{sech}^2 z \qquad \operatorname{coth}^2 z - 1 = \operatorname{csch}^2 z$$

$$\operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z \qquad \operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z \qquad \operatorname{th}(-z) = -\operatorname{th} z$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(z_1 \pm z_2) &= \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2 \\ \operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) &= \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2 \\ \operatorname{th}(z_1 \pm z_2) &= \frac{\operatorname{th} z_1 \pm \operatorname{th} z_2}{1 \pm \operatorname{th} z_1 \operatorname{th} z_2} \end{aligned}$$

Les fonctions trigonométriques et les fonctions hyperboliques sont liées par les relations suivantes :

$$\sin iz = i \operatorname{sh} z \qquad \cos iz = \operatorname{ch} z \qquad \operatorname{tg} iz = i \operatorname{th} z$$

$$\operatorname{sh} iz = i \sin z \qquad \operatorname{ch} iz = \cos z \qquad \operatorname{th} iz = i \operatorname{tg} z$$

d. Logarithme complexe :

La fonction $\operatorname{Log} z$, $z \neq 0$ est une fonction multiforme définie par

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} z &= \ln|z| + i \arg z \\ &= \ln|z| + i\,(\operatorname{Arg} z + 2k\pi)\,,\ k \in \mathbb{Z},\ \text{où}\ -\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi. \end{aligned}$$

La détermination principale est obtenue pour k=0.

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z,\ \text{où}\ -\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi.$$

6. Fonctions holomorphes :

a. Dérivabilité :

Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $z_0 \in D$ un de ses points et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est dérivable en z_0 si

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

On pose alors

$$f'(z) = \frac{df}{dz}(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

La fonction est dite **holomorphe** dans D si elle est dérivable en chaque point de D. Une fonction est dite holomorphe en un point si elle est holomorphe dans un disque ouvert centré en ce point. Les règles du calcul différentiel concernant sommes, différences, produits, quotients et compositions (lorsqu'elles sont définies) sont bien entendu encore valables et une fonction dérivable en un point y est nécessairement continue.

b. Les équations de Cauchy-Riemann :

Théorème (Cauchy-Riemann) *Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors ses parties réelles et imaginaires u et v y admettent en tout point des dérivées partielles qui satisfont les équations de Cauchy-Riemann :*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Dans ce cas on a :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

Proposition :

$$f \ \text{dérivable} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

7. Fonctions harmoniques :

Définition : Une fonction $u(x, y)$ de classe C^2 est dite **Harmonique** si elle vérifie l'équation de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Exercices :

1. Donner la partie réelle et la partie imaginaire de la fonction $f(z) = z^2$.

$$f(x + iy) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy).$$

Donc

$$u(x, y) = x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(f) \quad \text{et} \quad v(x, y) = 2xy = \mathrm{Im}(f).$$

2. Montrez que $\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z}$ n'existe pas.

Si $z = x + iy$,

alors suivant le chemin $y = 0$, on a $z = x$ et donc

$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{x\to 0} \frac{\bar{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1,$$

suivant le chemin $x = 0$,on a $z = iy$, et donc

$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{iy\to 0} \frac{\overline{iy}}{iy} = \lim_{iy\to 0} \frac{-iy}{iy} = -1.$$

$1 \neq -1$, donc la limite n'existe pas.

3. Résoudre dans C **:** $e^z = -a$, $a > 0$ **.**

Soit $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$,

$$e^z = e^x(cosy + isiny) = -a = a.(-1) = a(\cos(\pi) + isin(\pi))$$

Par identification : $\begin{cases} e^x = a \\ \begin{cases} cosy = \cos(\pi) \\ siny = \sin(\pi) \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = lna \\ y = \pi + 2k\pi, \quad k \in Z \end{cases}$

D'où l'ensemble de solutions en z :

$$z = lna + i(2k+1)\pi \quad , \quad k \in Z$$

4. **D**onnez la partie réelle , la partie imaginaire et le module de $\sin z$ et $\cos z$.

Posons $z = x + iy$; $x, y \in R$ il vient :

$\cos z = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x\, ch y - i \sin x\, sh\, y$

$\sin z = \sin x \cos iy + \sin iy \cos x = \sin x\, ch y + i \cos x\, sh\, y$

D'où l'on tire : $\begin{cases} Re(\sin z) = \sin x\, ch y \\ Im(\sin z) = \cos x\, sh y \end{cases}$, $\begin{cases} Re(\cos z) = \cos x\, ch y \\ Im(\cos z) = -\sin x\, sh y \end{cases}$

$$\begin{aligned} |\sin(z)| &= \sqrt{\sin^2(x)\mathrm{ch}^2(y) + \cos^2(x)\mathrm{sh}^2(y)} \\ &= \sqrt{\sin^2(x)(1 + \mathrm{sh}^2(y)) + \cos^2(x)\mathrm{sh}^2(y)} \\ &= \sqrt{\sin^2(x) + \mathrm{sh}^2(y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\cos(z)| &= \sqrt{\cos^2(x)\mathrm{ch}^2(y) + \sin^2(x)\mathrm{sh}^2(y)} \\ &= \sqrt{\cos^2(x)(1 + \mathrm{sh}^2(y)) + \sin^2(x)\mathrm{sh}^2(y)} \\ &= \sqrt{\cos^2(x) + \mathrm{sh}^2(y)} \end{aligned}$$

5. Ecrire les nombres suivants sous la forme *a+ib*

(a) $\log 4$ (b) $\log(-1)$ (c) $\log(1+i)$

(a) $\log 4 = \ln 4 + i \arg(4) = \ln 4 + i2k\pi$.
(b) $\log(-1) = \ln 1 + i \arg(-1) = i(2k+1)\pi$
(c) $\log(1+i) = \ln|1+i| + i \arg(1+i) = \ln\sqrt{2} + i(\pi/4 + 2k\pi)$.

6. **C**alculez la détermination principale du logarithme complexe log *z* pour :

(a) $z = i$ (b) $z = 1+i$ (c) $z = -2$

(a) $\mathrm{Log}(i) = \ln|i| + i\,\mathrm{Arg}(i) = i\dfrac{\pi}{2}$,
(b) $\mathrm{Log}(1+i) = \ln|1+i| + i\,\mathrm{Arg}(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\dfrac{\pi}{4}$,
(c) $\mathrm{Log}(-2) = \ln 2 + i\,\mathrm{Arg}(-2) = \ln 2 + i\pi$.

7. Résoudre dans C l'équation : 1) $i = e^{iz} - (1+i)e^{-iz}$ 2) $e^{2z+4} = 3\sqrt{3} + 3\mathrm{i}$

1.

$$e^{iz} - (1+i)e^{-iz} = i \iff e^{2iz} - ie^{iz} - (1+i) = 0,$$

posons $X = e^{iz}$, on obtient

$$\begin{aligned}
& X^2 - iX - (1+i) = 0, \\
& \Delta = 3 + 4i, \\
& X_1 = 1+i, \quad X_2 = -1 \\
\Rightarrow \quad & e^{iz} = 1+i \quad \vee \quad e^{iz} = -1, \\
\Rightarrow \quad & iz = \ln(1+i) \quad \vee \quad iz = \ln(-1), \\
\Rightarrow \quad & iz = \ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i \quad \vee \quad iz = (2k+1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}, \\
\Rightarrow \quad & z = -i\ln(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee \quad z = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
e^{2z+4} &= 3\sqrt{3} + 3i \\
\Rightarrow 2z+4 &= \ln(3\sqrt{3}+3i) = \ln(|3\sqrt{3}+3i|) + i\arg(3\sqrt{3}+3i) + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z} \\
\Rightarrow 2z+4 &= \ln(6)| + i\frac{\pi}{6} + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z} \\
\Rightarrow z &= \frac{1}{2}\ln(6) - 2 + i\frac{\pi}{12} + k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

8. Montrer que la fonction $f(z) = \bar{z}$ n'est pas holomorphe.

Méthode 1 : conditions de Cauchy-Riemann :

$$f(z) = \overline{z} = x - iy$$
$$u(x,y) = x, \quad et\ v(x,y) = -y$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = -1.$$
$$\Rightarrow \quad f(z) = \overline{z}\ n'est\ pas\ dérivable.$$

Méthode 2 :

$$f(z) = \overline{z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 1 \neq 0,$$

Ainsi f n'est pas holomorphe (dérivable).

9. Indiquer parmi les fonctions suivantes celles qui sont holomorphes :

$$f(z) = Im(z), \qquad f(z) = e^{\overline{z}}, \qquad f(z) = z^2 + 5iz + 3 - i,$$

1.

$$f(z) = Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = -\frac{1}{2i} \neq 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Donc f n'est pas holomorphe sur C.

2.

$$f(z) = e^{\overline{z}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = e^{\overline{z}} \neq 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Donc f n'est pas holomorphe sur C.

3. Méthode 1 :

$$f(z) = z^2 + 5iz + 3 - i$$
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ainsi f est holomorphe sur C et $f'(z) = 2z + 5i$

Méthode 2 :

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2+5iz+3-i \\ &= (x+iy)^2+5i(x+iy)+3-i \\ &= x^2-y^2+2ixy+5ix-5y+3-i \\ \Rightarrow &\quad u(x,y)=x^2-y^2-5y+3, \text{ et } v(x,y)=2xy+5x-1. \end{aligned}$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées car :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=2x \text{ et } \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=2x,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-2y-5 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=2y+5,$$

Ainsi f est holomorphe sur C. et $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}$

$$f'(z)=2x+i(2y+5)=2x+2iy+5i=2(x+iy)+5i=2z+5i$$

10.

Vérifier que la fonction $u(x,y)=x^2-y^2-y$ est harmonique sur $\mathbb{C}$ et déterminer une fonction harmonique v conjuguée de u.

On a

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-2y-1,$$
$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}=2, \quad \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=-2,$$

Donc

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0.$$

Par conséquent, la fonction $u(x,y)=x^2-y^2-y$ est une fonction harmonique sur $\mathbb{C}$.

Soit v une fonction conjuguée de u, alors les conditions de Cauchy-Riemann suivantes sont vérifiées,

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=2x \qquad (1)$$
$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}=-\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=2y+1. \qquad (2)$$

En intégrant l'équation (1) par rapport à y on obtient

$$v(x,y)=2xy+h(x) \qquad (3)$$

En dérivant (3) par rapport à x et en remplaçant dans (2), on obtient

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}=2y+h'(x)=2y+1$$

D'où

$$h'(x) = 1.$$

En intégrant par rapport à x, on a

$$h(x) = x + c\,; \qquad \text{où } c \in \mathbb{C} \text{ est une constante.}$$

Donc, les fonctions harmoniques définies par $v(x, y) = 2xy + x + c$ sont des fonctions conjuguées de u. Puisque les fonctions u et v sont continues alors les fonctions complexes correspondantes,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = (x^2 - y^2 - y) + i(2xy + x + c), \qquad (c \in \mathbb{C})$$

sont holomorphes sur $\mathbb{C}$, de plus, on a

$$f(z) = z^2 + iz + c, \qquad c \text{ est une constante de } \mathbb{C}.$$