Les intégrales doubles

1. Définition :

On appelle intégrale d'une fonction $f(x,y)$ de deux variables, l'intégrale double de la fonction $f(x,y)$ sur le domaine D et on note : $\iint_D f(x,y)dxdy$.

2. Calcul des intégrales doubles :

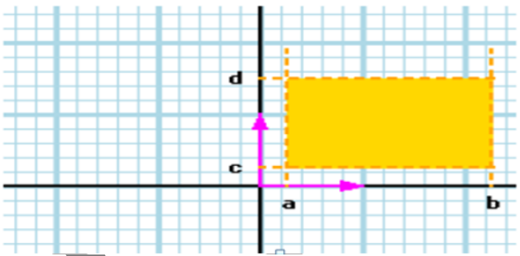
2.1.Formules de Fubini

Théorème 01: Soit f une fonction continue sur un rectangle $D=[a,b]\times[c,d]$.Nous avons

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx = \int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy.$$

Nous calculons donc une intégrale double sur un rectangle en calculant deux intégrales simples :

- En intégrant d'abord par rapport à x entre a et b (en laissant y constante). Le résultat est une fonction de y.
- En intégrant cette expression de y entre c et d.
  Alternativement, on peut faire de même en intégrant d'abord en y puis ensuite en x.



Exemples :

Calculer les intégrales doubles suivantes :

1.

$$\iint_D (x^2y-3xy^2)\;dxdy,\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\;,1\le x\le 2,\quad -1\le y\le 1\}.$$

Solution :

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{1}^{2}(x^2y-3xy^2)dx\right)dy=\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{3}yx^3-\frac{3}{2}\,y^2x^2\right]_1^2dy$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{7}{3}\,y-\frac{9}{2}y^2dy=\frac{-18}{6}.$$

2.

$$\iint_D ye^{xy}\ \ dxdy, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ \ 1 \leq x \leq 2, \qquad 0 \leq y \leq 2\}$$

Solution :

$$\iint_D ye^{xy}\ \ dxdy = \int_0^2 (\int_1^2 ye^{xy} dx) dy = \int_0^2 [e^{xy}]_1^2) dy = \frac{1}{2}e^4 - e^2 + \frac{1}{2}.$$

Corollaire :

Une intégrale double de la forme $\iint_{[a;b]\times[c;d]} f(x)g(y)\,dx\,dy$ peut se calculer en séparant les variables :

$$\iint_{[a;b]\times[c;d]} f(x)g(y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right).$$

Exemples :

Calculer les intégrales doubles suivantes :

$$\iint_{[0,1]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} x.\cos y dxdy = \int_0^1 x\,dx.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y\ dy = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1.[\sin y]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

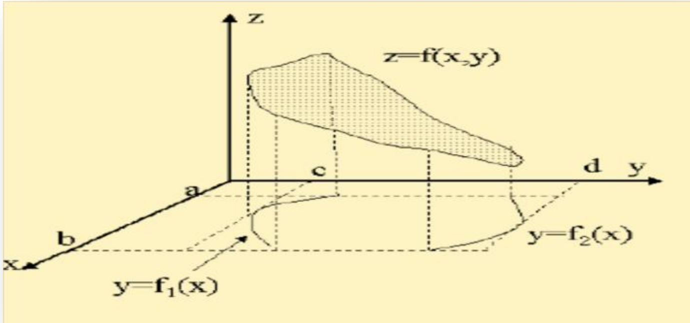
$$\int_0^1\int_1^2 e^{x-y} dx\,dy = \int_0^1 e^x dx \int_1^2 e^{-y} dy = (e-1)(e^{-1} - e^{-2}).$$

Théorème 02 : Soit f une fonction continue sur un domaine borné D de $\mathbb{R}^2$. L'intégrale double $I = \iint_D f(x,y)dx\,dy$ se calcule par l'une ou l'autre des façons suivantes :

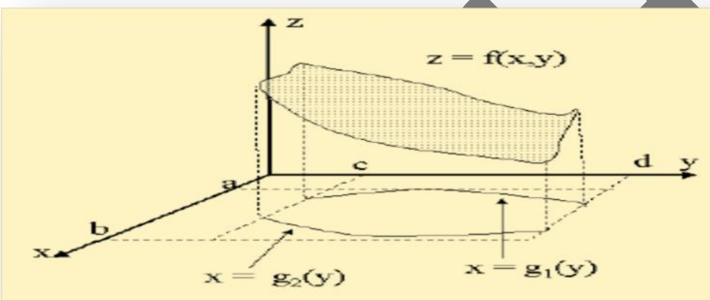
- Si l'on peut représenter le domaine D sous la forme
  $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f_1(x) \leq y \leq f_2(x), a \leq x \leq b\}$ alors
  $$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\right] dx.$$
- Si l'on peut représenter le domaine D sous la forme
  $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / g_1(y) \leq x \leq g_2(y), c \leq y \leq d\}$, alors :
  $$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx\right] dy.$$

Si les deux représentations sont possibles, les deux résultats sont évidemment égaux.

Intégrale en *y* en premier :

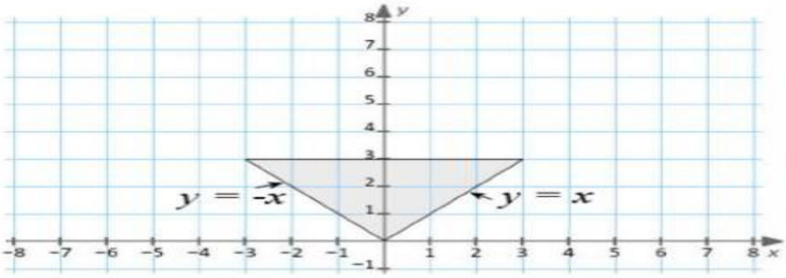


Intégrale en *x* en premier :



Exemple :

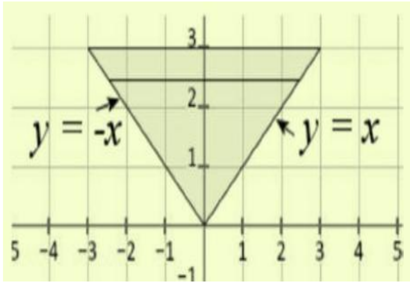
Calculer l'intégrale $\iint \quad dA$ dans la région montrée sur la figure ci-dessous :



Solution :

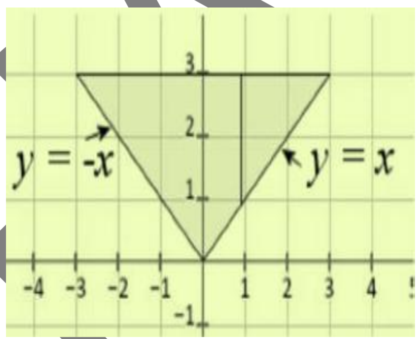
Si on commence par intégrer en x en premier, on remarque que le domaine est régulier selon OX. L'intégrale est donc :

$$\begin{aligned}\int_0^3\int_{-y}^{y} dxdy &= \int_0^3 [x]_{-y}^{y}\, dy\\ &= \int_0^3 2y dy\\ &= \left[y^2\right]_0^3\\ &= 9\end{aligned}$$



Si on commence par intégrer en *y* en premier, on remarque que le domaine est irrégulier selon OY. L'intégrale est la somme de deux intégrales :

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{0}\int_{-x}^{3} dydx + \int_0^3\int_x^3 dydx &= \int_{-3}^{0}[y]_{-x}^{3}\, dx + \int_0^3 [y]_x^3\, dx\\ &= \int_{-3}^{0}(3+x)\,dx + \int_0^3(3-x)\,dx\\ &= \left[3x+\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{0} + \left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_0^3\\ &= \left([0]-\left[-9+\frac{9}{2}\right]\right)+\left(\left[9-\frac{9}{2}\right]-[0]\right)\\ &= 9\end{aligned}$$



2.2.Changement de variable dans une intégrale double :

a. Cas général :

Supposons qu'on effectue le changement de variables $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$.

Lorsque (x,y) varie dans le domaine D ; (u,v) varie dans un domaine D'. On considère le déterminant de la matrice $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}$ qu'on appelle matrice Jacobienne du changement de coordonnées.

on a: $$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} F(u,v).|J|.dudv.$$

Exemple :

Calculer : $\iint_D (x+y)^3(x-y)^2 \cdot dx \cdot dy$ si D est fermé par :

$y = -x+1$; $y = x-1$; $y = 3-x$; $y = x+1$.

Solution :

1. Déterminons x et y en fonction de u et v :

$$\text{On pose : } \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = u + v \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}(u+v) = \varphi(u,v). \\ 2y = u - v \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}(u-v) = \psi(u,v). \end{cases}$$

2. Calculons le déterminent du Jacobien :

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow |J| = \frac{1}{2}$$

L'intégrale devient :

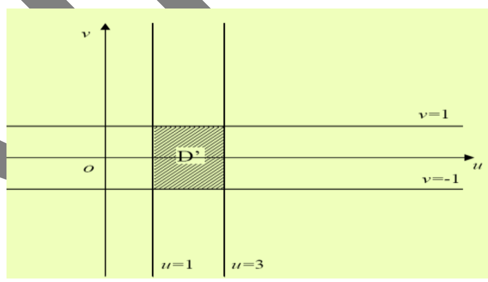
$$I = \iint_D (x+y)^3 (x-y)^2 \cdot dx \cdot dy = \iint_{D'} u^3 v^2 \cdot \frac{1}{2} du \cdot dv.$$

3. Cherchons les bornes de u et v :

$$\begin{array}{lll} y = -x+1 & \Rightarrow y + x = 1 & \Rightarrow u = 1 \\ y = x - 1 & \Rightarrow y - x = -1 & \Rightarrow v = -1 \\ y = 3 - x & \Rightarrow y + x = 3 & \Rightarrow u = 3 \\ y = x + 1 & \Rightarrow y - x = 1 & \Rightarrow v = 1 \end{array}$$

Donc D' est limité par les droites :

$$u = 1,\ u = 3,\ v = -1,\ v = 1.$$



4. L'intégrale est donc :

$$\int_1^3\int_{-1}^1 u^3 . v^2 . \frac{1}{2} . dvdu = \frac{1}{2}\left(\int_1^3 u^3\, du\right).\left(\int_{-1}^1 v^2\, dv\right) = \frac{20}{3}$$

b. Changement en Coordonnées polaires :

Dans ce cas : $u = \theta,\ v = r$: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

Le Jacobien de la transformation des coordonnées cartésiennes x et y en coordonnées polaires θ et r est donné par :

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

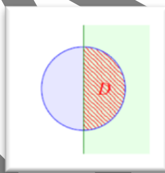
On a donc :

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} F(r,\theta).r.drd\theta$$

Exemple :

Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2}$ où $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1 \text{ et } x\ge 0\}$.

Solution :



$\Delta = \{(r,\theta)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R} \mid 0\le r\le 1 \text{ et } -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$.

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2} &= \iint_\Delta \frac{r\cos\theta}{1+r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \left(\int_0^1 \frac{r^2}{1+r^2}\,\mathrm{d}r\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\\ &= \left(\int_0^1 \frac{r^2+1-1}{1+r^2}\,\mathrm{d}r\right)[\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \left(\int_0^1 1-\frac{1}{1+r^2}\,\mathrm{d}r\right)\times 2\\ &= 2\,[r-\arctan r]_0^1 = 2\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{2-\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$