Résumé sur les séries :

1. Définitions :

a. Série :

Définition 1 **:** soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite numérique.
L'expression : $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$ est appelée une *série numérique.*
et est notée $\sum u_n$ les nombres $u_1,\ u_2,\ u_3,\cdots,\ u_n,\cdots$ sont les *termes* de la série.

b. Somme d'une série :

Définition 2 **:** La somme des n premiers termes de la série est appelée *somme partielle* S_n : $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$
Si la limite suivante existe et est finie :

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n$$

On l'appelle la *somme* de la série $\sum u_n$ et on dit que la série est *convergente*.
Si $\lim S_n$ n'existe pas (par exemple : $S_n\ \to\infty$),on dit que la série $\sum u_n$ *est divergente et qu'elle n'a pas de somme.*

Exemples :

Etudier la nature et calculer la somme dans le cas de convergence des séries de termes généraux :

$$\mathbf{1.\,U_n=\frac{1}{n(n+1)}},\qquad \mathbf{2.\,V_n=\log\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

Solution :

1. $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}=\dfrac{(a+b)n+a}{n(n+1)}$
Par identification, on trouve : $a=1$ et $b=-1$.
Alors $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$.

$S_N=\sum_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{N}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$
$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\ldots+(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N})+(\frac{1}{N}-\frac{1}{N-1})=1-\frac{1}{N-1}$.
$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n-1})=1$; c'est à dire, la série de terme général u_n converge.

2. $$v_n=\log\left(1-\frac{1}{n}\right)=\log\left(\frac{n-1}{n}\right)=\log(n-1)-\log(n)$$

par suite, la suite des sommes partielles est définie par:

$$\begin{aligned}\mathbf{S_N} &= \sum_{n=2}^{N} v_n=\sum_{n=2}^{N}(\log(n-1)-\log(n))\\ &= 0-\log 2+\log 2-\log 3+\ldots+\log(N-1)-\log(N)\\ &= -\log(N).\end{aligned}$$

Par suite, $\lim_{N\to\infty}\mathbf{S_N}=-\infty$ et la série est divergente.

c. Condition nécessaire de convergence :

Théorème 1 **:** Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\sum u_n \; converge \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

Corollaire 1 **:** Si u_n le terme général d'une série ne tend pas vers 0 lorsque $n \to \infty$ alors la série $\sum u_n$ est divergente.

$$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0 \Rightarrow \sum u_n \; diverge$$

Exemples :

la série $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\cdots+\frac{n}{2n+1}+\cdots$

Diverge, car $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\neq 0$

La série $\sum \frac{n}{n+1}$ est divergente, car $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)=1\neq 0}$

2. Séries à termes positifs :

On dit que la série $\sum u_n$ est une série à termes positifs ssi : $\forall n : u_n \geq 0$

a. Condition de convergence :

pour qu'une série à termes positifs soit convergente il faut, et il suffit, que la suite de ses somme partielles soit majorée.

i.e. si $\sum u_n$ est une série à termes positifs, et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de somme partielle, alors :

$$\sum u_n \; converge \Leftrightarrow \exists M, \forall n : S_n \leq M$$

b. Séries de référence (usuelles) :

- **Série géométrique :**

Considérons la série géométrique de premier terme ***a*** et de raison q $(a \neq 0)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$$

La somme partielle $S_n = \begin{cases} a\frac{1-q^{n+1}}{1-q} & si \;\; q \neq 1 \\ (n+1)a & si \;\; q = 1 \end{cases}$

La série géométrique $\sum_{n\geq 0} aq^n$ est convergente ssi $|q| < 1$, et on a :

$$\sum_{n\geq 0} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots = \frac{a}{1-q} = s$$

Donc : $\sum_{n\geq 0} aq^n$ est $\begin{cases} \text{convergente} & \text{si } |q| < 1 \\ \text{divergente} & \text{si } |q| \geq 1 \end{cases}$

Exemples :

1. Si $a = 1$ et $q = \frac{1}{2}$, la série géométrique $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente car $q = \frac{1}{2} \in]-1,1[$ et la série converge vers sa somme $s = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$
2. Si $a = 1$ et $q = 3$, la série géométrique $\sum_{n\geq 0}(3)^n$ est divergente.

- **Série de Riemann :**

On appelle série de Riemann toute série dont le terme général est de la forme :

$u_n = \frac{1}{n^\alpha}, n \geq 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

La série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} converge & si \quad \alpha > 1 \\ diverge & si \quad \alpha \leq 1 \end{cases}$

Si $\alpha = 1$: $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ série harmonique divergente.

Exemples :

1. La série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, car $\alpha = 2 > 1$
2. La série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, car $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

- **Série de Bertrand :**

La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ converge si l'on a un des deux cas suivants :

$\boldsymbol{\alpha > 1}$ ou bien $\boldsymbol{\alpha = 1 \; et \; \beta > 1}$. tq : $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

Diverge si $\boldsymbol{\alpha < 1}$ ou bien $\boldsymbol{\alpha = 1 \; et \; \beta \leq 1}$

Exemple :

La série de Bertrand $\sum \frac{1}{n(\ln n)}$ diverge.

c. **Critères de convergence :**

- **Critères de comparaison :**

Théorème 1: Soit $\sum u_n$ et $\sum a_n$ deux séries à termes positifs vérifiant :

$$u_n \leq a_n$$

A partir d'un certain rang. Alors :

1) Si $\sum a_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

2) Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum a_n$ diverge.

Théorème 2: Soit $\sum u_n$ et $\sum a_n$ deux séries à termes positifs, si la limite non nulle :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{a_n} = l$$

Existe, alors les deux séries sont de même nature.

Exemples :

Trouver la nature des séries numériques suivantes :

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^3+1}$; 2. $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$; 3. $\sum_{n\geq 3} \frac{\ln n}{n}$

Solution :

1. $n^3+1 > n^3 \Rightarrow \frac{1}{n^3+1} < \frac{1}{n^3} \Rightarrow \frac{n}{n^3+1} < \frac{1}{n^2}$, comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann : $\alpha = 2 > 1$) $\Rightarrow$ $\sum \frac{n}{n^3+1}$ est convergente.
2. On a : $0 \leq \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$ et $\sum \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente (car $q = \frac{1}{2} \in]-1,1[$), alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ est convergente.
3. $\forall\, n \geq 3$: $\ln n \geq 1 \Rightarrow \frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$ et comme la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente, alors la série $\sum_{n\geq 3} \frac{\ln n}{n}$ est divergente aussi.

- **Comparaison avec une intégrale :**

Théorème : Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs non croissants, *i.e.*

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$$

et soit $f(x)$ une fonction continue telle que :

$$f(1) = a_1;\ f(2) = a_2;\ f(3) = a_3;\ \cdots\ ; f(n) = a_n\ ; \cdots$$

Alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge } \Leftrightarrow \int_0^{\infty} f(x)dx \text{ converge}$$

Exemples :

1. La série $\sum \frac{1}{n}$ (série Harmonique)est divergente, car :
L'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = [\ln(x)]_1^{\infty} = \infty$ diverge.
2. La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, car :
L'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^{\infty} = 1$ converge.

- **Critère de D'Alembert :**

Théorème : Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Si la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$$

Existe, alors :

1) Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge

2) Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ converge

Exemples :

Soit $u_n = \frac{1}{n!}$, la série : $\sum u_n$ est convergente, car :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right) = 0 < 1$$

Soit la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!}$:

$$u_n = \frac{n^n}{n!}, \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1$$

Alors, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!}$ est divergente.

3) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$:

Voir la quantité $\frac{u_{n+1}}{u_n}$: $\begin{cases} si \ \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 : la\ série\ \ D.V. \\ si \ \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 : on\ ne\ peut\ rien\ conclure, changer\ le\ critère. \end{cases}$

Exemple :

Donner la nature de la série : $\sum_{n\geq 1} n^2$.

Solution :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1.$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} > 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} n^2 \quad est\ divergente.$$

- **Critère de Cauchy :**

Théorème : Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Si la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$$

existe, alors :

1) Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ converge
2) Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ diverge
3) Si $l=1$:

voir la quantité $\sqrt[n]{u_n}$: $\begin{cases} si\ \sqrt[n]{u_n} > 1 : la\ série\ D.V. \\ si\ \sqrt[n]{u_n} < 1 : on\ ne\ peut\ rien\ conclure, changer\ le\ critère. \end{cases}$

Exemples:

Etudier la convergence des séries dont les termes généraux sont :

1. $u_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$, 2. $u_n = \left(a + \frac{1}{n}\right)^n$ / $a > 0$

Solution :

1. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ la série $\sum u_n$ est convergente.

2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(a + \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(a + \frac{1}{n}\right) = a$

- Si $0 < a < 1$, la série $\sum u_n$ converge.
- Si $a > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.
- Si $a = 1$:

  $\sqrt[n]{u_n} = a + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} > 1 \Rightarrow$ la série diverge.

3. **Séries à termes quelconques**

a. **Séries alternées :**

Définition : On appelle série alternée une série de la forme $\sum(-1)^n a_n$ avec $a_n \geq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = (-1)^0 a_0 + (-1)^1 a_1 + (-1)^2 a_2 + \cdots \ldots = +a_0 - a_1 + a_2 - \cdots$$

- **Convergence des séries alternées :**

Théorème de Leibniz :

On considère la série **alternée** $\sum(-1)^n a_n$:

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ et si la suite (a_n) est décroissante, alors la série alternée $\sum(-1)^n a_n$ converge.

Exemple :

Étudier la convergence de la série : $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$

Solution :

1. série alternée : $u_n = (-1)^n.\frac{1}{n}$ et $a_n = \frac{1}{n} > 0$. Donc c'est bien une série alternée.

2. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

3. (a_n) est décroissante car : $a_n = \frac{1}{n}$ et $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0.$

Les conditions de convergence sont satisfaites, alors $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

- **Convergence absolue :**

Théorème : Toute série absolument convergente est convergente. La réciproque est fausse.

$$\sum |u_n| \ \ converge \ \Rightarrow \sum u_n \ \ converge$$

- **Série Semi-convergente :**

Définition : une série est dite <u>semi-convergente</u> si $\sum u_n$ est convergente et $\sum |u_n|$ est divergente.

Exemples :

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente car :

$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente d'après Leibniz et $\sum_{n\geq 1} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

2. $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{n^2}$ est absolument convergente alors, elle est convergente car :

$|\cos n| \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ et comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente alors $\sum \left|\frac{\cos n}{n^2}\right|$ est convergente par comparaison.

Donc $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{n^2}$ est absolument convergente $\Rightarrow$ $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{n^2}$ est convergente.

4. Séries de fonctions :

- Une série de fonctions est une série dont le terme général est fonction de x : $u_n = u_n(x)$. Une série de fonctions est désignée par $\sum u_n(x)$ ou $\sum f_n(x)$.
- Domaine de convergence de la série $\sum u_n(x)$ est l'ensemble des valeurs de x telle que la série converge.

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} : \sum u_n(x) \ \ converge\right\}$$

a. Séries entières :

On appelle série entière réelle toute série de fonctions de la forme $\sum a_n x^n$.

- Si $|x| < R$: $\sum a_n x^n$ converge absolument.
- Si $|x| > R$: $\sum a_n x^n$ diverge.
- Si $|x| = R$: la série peut aussi bien converger que diverger.

R est le rayon de convergence $(0 \le R < \infty)$ donné par :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \text{ou bien} \quad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Exemple :

Calculer le rayon de convergence R de $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+1)\,2^{n+1}x^n$ et étudier sa convergence en $x = \pm R$.

En déduire le domaine de convergence de la série.

Solution :

On a $a_n = (n^2+1)\,2^{n+1}$ et

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\left((n+1)^2+1\right)2^{n+1+1}}{(n^2+1)\,2^{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+2n+2)\,2}{(n^2+1)} = 2,$$

donc $R = \frac{1}{2}$.

Pour $x = R = \frac{1}{2}$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+1)\,2^{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2\,(n^2+1)$ qu'est divergente car

$$\lim_{n\to+\infty} 2\,(n^2+1) = +\infty \neq 0.$$

Pour $x = -R = -\frac{1}{2}$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+1)\,2^{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2\,(n^2+1)\,(-1)^n$ qu'est divergente car

$$\lim_{n\to+\infty} 2\,(n^2+1)\,(-1)^n \text{ n'existe pas.}$$

Le domaine de convergence est donc : $D_c =]-1/2, 1/2[$