ONDES ET VIBRATIONS

L2- S3

Chapitre I : Composition des mouvements vibratoires

I) Composition des mouvements vibratoires (sinusoïdaux) :

I-1- Définition

- le but de la composition des mouvements vibratoires est de trouver la vibration résultante qui se base sur le principe de superposition.

- On distingue deux types de compositions de vibrations.

a) les vibrations de même direction : dites parallèles

b) les vibrations de direction perpendiculaire

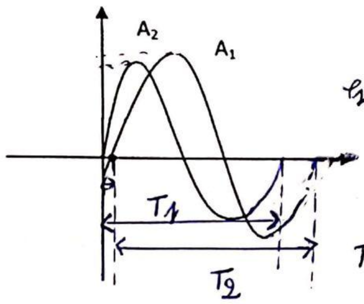
Req : (Une vibration est un phénomène physique périodique qui peut être un champ magnétique $\vec{B}$ ou un champ électrique $\vec{E}$ ou un déplacement x.

I-2- Composition des vibrations sinusoïdales de même direction et de même fréquence :

1/ Principe :

Soit $x_1(t)$, $x_2(t)$ deux vibrations de même fréquence $\omega_1=\omega_2=\omega$ tq $T_1 = T_2 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$

$x_1(t)=A_1\sin(\omega t+\varphi_1)$ et $x_2(t)=A_2\sin(\omega t+\varphi_2)$



$\varphi_1 = 0$

$T_1 = T_2$

<u>But</u> : Trouver la vibration résultante

$X(t)= x_2(t)+ x_1(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$ A? Et φ?

Pour cela il existe **trois méthodes**

<u>1^er/ méthode directe</u>

$$x(t)= x_1(t) + x_2(t)=A_1 \sin(\omega t+\varphi_1) + A_2 \sin(\omega t+\varphi_2)$$

Dans le cas générale on a : Csin(A+B)=CsinAcosB+CsinBcosA

Donc

$$x(t) = A_1 \sin \omega t \cos\varphi_1 + A_1 \sin \varphi_1 \cos\omega t + A_2 \sin \omega t \cos\varphi_2 + A_2 \sin \varphi_1 \cos\omega t$$
$$x(t) = (A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos \varphi_2) \sin \omega t + (A_2 \sin \varphi_2 + A_1 \sin \varphi_1)\cos\omega t$$
$$x(t) = (A \cos\varphi) \sin \omega t + (A \sin \varphi) \cos\omega t$$

Par Identification

a) $\begin{cases} A\cos\varphi = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 \rightarrow (1) \\ A\sin\varphi = A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2 \rightarrow (2) \end{cases}$

$(1)^2+(2)^2 \rightarrow A^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = (A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_1)^2 + (A_1\sin\varphi_2 + A_2\sin)^2$

$(1)^2+(2)^2 \rightarrow \quad A_1^2\cos^2\varphi_1 + A_2^2\cos^2\varphi_2 + 2A_1A_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2 +$

$$A_1^2\sin^2\varphi_1 + A_2^2\sin^2\varphi_2 + 2A_1A_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2$$

$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)$

$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_1)$

b) $\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = tg\varphi = \frac{\cancel{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}}{A_2\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$

$A = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_1)$ Amplitude de la vibration résultante

$\varphi = arctg\,\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$ Phase de la vibration résultante

2ème / Méthode de Fresnel

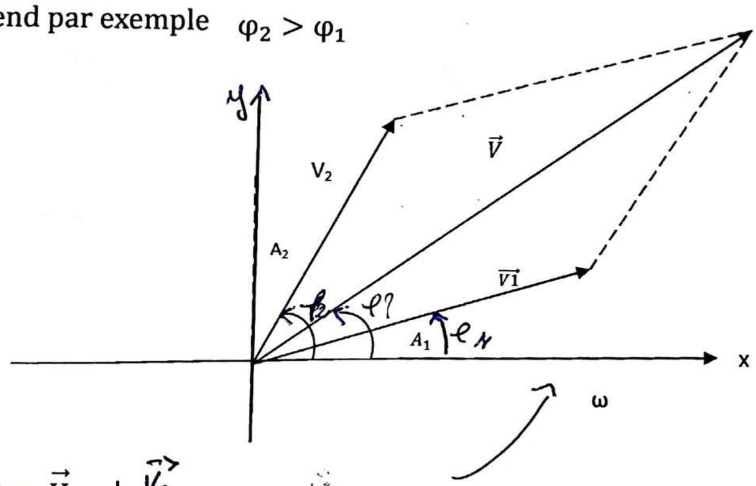
A chaque vibration on associe un vecteur qui tourne a la vitesse angulaire : ω

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \sim \vec{V}_1 \left| \begin{array}{l} |\vec{V_1}| = A_1 \\ \omega \\ \varphi_1 \end{array} \right.$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \sim \vec{V}_2 \left| \begin{array}{l} |\vec{V_2}| = A_2 \\ \omega \\ \varphi_2 \end{array} \right.$$

$$x = x_1 + x_2 \rightarrow \vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \quad \text{et} \quad \vec{V} \left| \begin{array}{l} |\vec{V}| = A? \\ \omega \\ \varphi? \end{array} \right.$$

On prend par exemple $\varphi_2 > \varphi_1$



$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{1x} \\ V_{1y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{2x} \\ V_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{1x} + V_{2x} \\ V_{1y} + V_{2y} \end{pmatrix}$$

Les composantes des vecteurs

$$\vec{V}_1 \left| \begin{array}{l} V_{1x} = A_1 \cos\varphi_1 \\ V_{1y} = A_1 \sin\varphi_1 \end{array} \right| \quad \vec{V}_2 = \left| \begin{array}{l} V_{2x} = A_2 cos\varphi_2 \\ V_{2y} = A_2 sin\varphi_2 \end{array} \right. \quad \vec{V} = \left| \begin{array}{l} V_x = A_1 cos\varphi_1 + A_2 cos\varphi_2 \\ V_y = A_1 sin\varphi_1 + A_2 sin\varphi_1 \end{array} \right.$$

Le module $|\vec{V}| = A = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$

$$tg\,\varphi = \frac{V_y}{V_x} = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$$

3ème/ Méthode des complexes

A chaque vibration on associe un membre complexe

$$x_1 = A_1 \sin(wt + \varphi_1) \curvearrowright \bar{X}_1 = A_1 e^{i(wt+\varphi 1)}$$
$$x_2 = A_2 \sin(wt + \varphi_2) \curvearrowright \bar{X}_2 = A_2 e^{i(wt+\varphi 2)}$$

$x_1 = x_1 + x_2 \rightarrow \bar{X} = \bar{X}_1 + \bar{X}_2 \quad \bar{X} = A \quad e^{i(wt+\varphi)}$ A ? et φ ?

$$\Rightarrow A e^{i(\omega t+\varphi)} = A_1 e^{i(\omega t+\varphi 1)} + A_2 e^{i(\omega t+\varphi 2)}$$

$$\Rightarrow A e^{i\varphi} \cancel{e^{j\omega t}} = A_1 e^{i\varphi 1} \cancel{e^{j\omega t}} + A_2 e^{i\varphi 2} \cancel{e^{j\omega t}}$$ *dans le cas générale* $e^{i\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

$$\Rightarrow A\cos\varphi + jA\sin\varphi = A_1 cos\varphi_1 + jA_1 \sin\varphi_1 + A_2 cos\varphi_2 + jA_2 \sin\varphi_2$$

$$\begin{cases} A\cos\varphi = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 \rightarrow (1) \\ A\sin\varphi = A_1 \text{ins}\,\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2 \rightarrow (2) \end{cases}$$

$$(1)^2 + (2)^2 \Rightarrow \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$(2)/(1) \Rightarrow \quad tg\,\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

4ème / Généralisation :

On peut généraliser ces méthodes à la composition de (n) vibrations sinusoïdale de même fréquence

I-3-Composition des vibrations de même direction et de fréquences différentes :

1/ Cas de vibration d'amplitude différentes :

Soient deux vibrations sinusoïdales

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

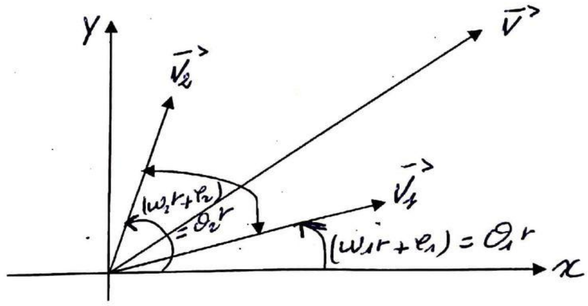
$$x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

On cherche la vibration résultante, pour cela on va utilise la méthode de FRESNEL.

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \rightarrow \textit{on associe un vecteur } \bar{V}_1 \left| \begin{array}{l} |\bar{V}_1| = A_1 \\ \omega_1 \end{array} \right.$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \rightarrow \textit{on associe un vecteur } \bar{V}_2 \left| \begin{array}{l} |\bar{V}_2| = A_2 \\ \omega_2 \end{array} \right.$$

On considère l'état des vecteurs à un instant qlq t



$$x = x_1 + x_2 \rightarrow \vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2} \qquad \textit{Le vecteur Resultant}$$

$$\vec{V_1} \left| \begin{array}{l} V_{1x} = A_1 \cos\theta_{1t} \\ V_{1y} = A_1 \sin\theta_{1t} \end{array} \right. \qquad \vec{V_2} = \left| \begin{array}{l} V_{2x} = A_2 \cos\theta_2 \\ V_{2y} = A_2 \sin\theta_2 \end{array} \right. \qquad \vec{V} = \left| \begin{array}{l} V_x = V_{1x} + V_{2x} \\ V_y = A_{1y} + V_{2y} \end{array} \right.$$

Rq : les vecteurs $\vec{V_1}$ *et* $\vec{V_2}$ ne tournent pas a la même vitesse : $\omega_1 \neq \omega_2$

Avec $\boldsymbol{\theta_{1t} = \omega_1 t + \varphi_1}$ et $\boldsymbol{\theta_{2t} = \omega_2 t + \varphi_2}$

Le déphasage entre les deux vecteurs $\vec{V_1}\, et\, \vec{V_2}$ n'est pas constant :

$\gamma = \theta_{2t} - \theta_{1t} = (\omega_2 t + \varphi_2) - (\omega_1 t + \varphi_1)$

Comme précédemment le module du vecteur résultant est donnée par $|\vec{V}| = A = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ donc on obtient $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_2A_2\cos(\theta_{1t} - \theta_{2t})}$

$$\Rightarrow \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_2A_2\cos[(\omega_1 t + \varphi_1) - (\omega_2 t + \varphi_2)]}$$

Mais seulement « **A** n'est pas constante » elle dépend du temps ⇒ $(\boldsymbol{A = f(t)})$

Conclusion :

le module du vecteur résultant n'est pas constant est ne tourne pas avec une vitesse angulaire constante

⇒par conséquent la vibration résultante

$\boxed{\boldsymbol{x(t) = x_1(t) + x_2(t)} \quad \textbf{n'est pas sinusoïdale}}$

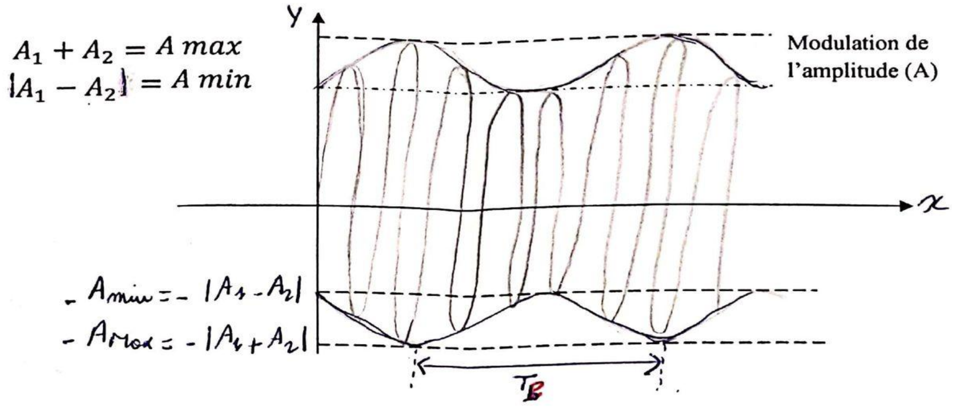
Amplitude = constante

Car une sinusoïde

$\omega = constante$

⟹ On dit que : l'amplitude de la vibration résultante est « **modulée** » autrement dit l'amplitude **A** oscille entre les valeurs

$\boldsymbol{A_{max} = A_1 + A_2}$ *et* $\boldsymbol{A_{min} = |A_1 - A_2|}$



2/ <u>Cas des vibrations de même amplitude</u> :

$si\ A_1 = A_2 = A_0$ $\quad \left.\begin{array}{l} x_1 = A_0\, sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2 = A_0\, sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{array}\right|$ *on cherche vibration résultante on utilisant la méthode directe*

$x = x_1 + x_2 \quad \rightarrow x = A_0[\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + sin(\omega_2 t + \varphi_2)]$

Transformation trigonométrique

En cas générale sinP+sinQ=2cos[(P-Q)/2]sin[(P+Q)/2]

$$\Rightarrow x = 2\,A_0 \cos\left[\frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_1}{2}\right] sin\left[\frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right]$$

$$Avec \quad \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_m: \quad pulsation\ moyenne$$

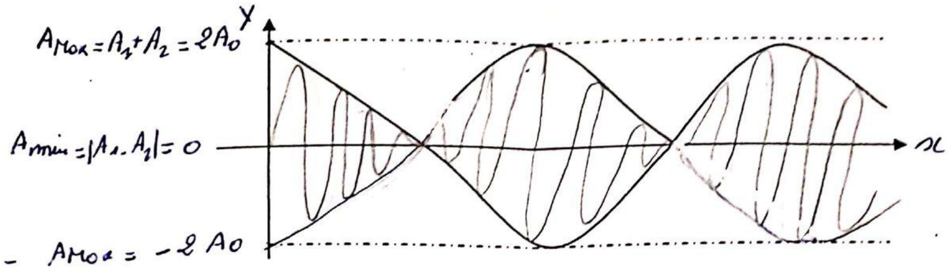
$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \Delta\omega: \quad différence\ ou\ variation\ des\ pulsation$$

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = \phi' \qquad \frac{\varphi_1 + \varphi_1}{2} = \varphi$$

$$\boxed{x = [2\,A_0\ \cos(\Delta\omega_t + \phi')]\sin(\omega_m t + \varphi)} \qquad \boxed{x = A(t)\sin(\omega_m t + \varphi)}$$

C'est la vibration résultante d'amplitude variable $A = f(t)$ et de pulsation ω_m

- l'amplitude **A(t)** est dite : enveloppe de la vibration ⇨ **A(t)** est une fonction périodique de pulsation $\Delta\omega$



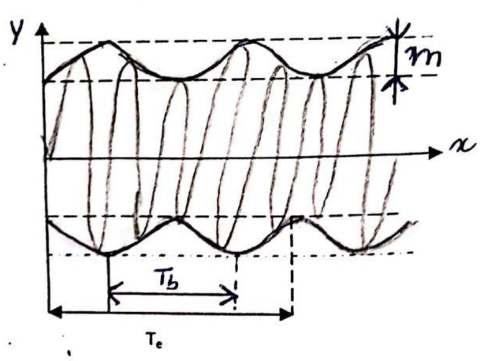
3-Phénomène de battement

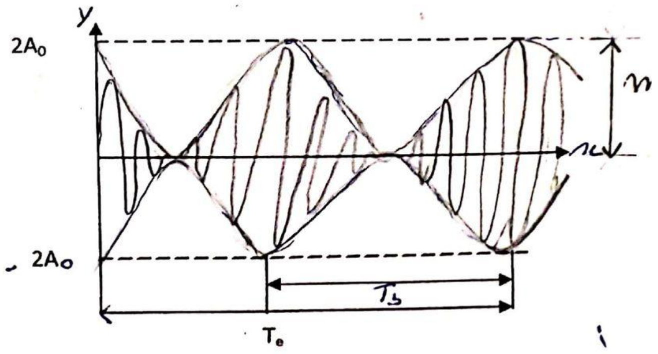
- Pour les amplitudes $A_1 \neq A_2$ ou $A_1 = A_2 = A_0$

- Ce phénomène se produit lorsque deux vibrations oscillent a des fréquences très voisines ……. $f_1 \neq f_2 \Longrightarrow \omega_1 \neq \omega_2$

$$\Longrightarrow \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_m \quad tq \quad \omega_m \simeq \omega_1 \quad ou \quad \omega_m = \omega_2$$

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \Delta\omega \quad \ll \quad pulsation\ très\ faible$$





Phénomène de modulation de l'amplitude + Phénomène de battement du signal résultant

Définition des périodes :

Req : $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

Par exp : pour le 2^{em}cas **A(t)=2A₀cos(Δωt+φ')**

Donc : **1⁰) période de l'enveloppe** :

$$T_e = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \quad ou \quad \Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \Rightarrow \boldsymbol{T_e} = \frac{\boldsymbol{4\pi}}{\boldsymbol{\omega_1 - \omega_2}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{T_e = 2T_b}$$

2⁰) période de battement : on prend le cas $\varphi_1=\varphi_2=0$

$$\Rightarrow \boldsymbol{T_b} = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{\omega_1-\omega_2}} \qquad Donc \ f_b = \frac{1}{T} \Rightarrow f_b = \frac{\omega_1}{2\pi} - \frac{\omega_2}{2\pi} = f_1 - f_2$$

$$f_b = f_1 - f_2 \ fréquence \ de \ battement$$

5/ Taux de modulation :

$$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{A_{Max} - A_{min}}}{\boldsymbol{A_{max} + A_{min}}} \qquad tq \ \ \boldsymbol{0 \leq m \leq 1}$$

A_{max}=A_1+A_2 Pour **m=0 ⇒ A_{max}=A_{min}** on a un signal sinusoïdal parfait

A_{min}=A_1-A_2 Pour **m=1 ⇒ A_{min} =0** on a une modulation parfaite