ONDES ET VIBRATIONS

L2- S3

Chapitre I : Oscillateurs harmoniques du second ordre

II-A/ Principes de la dynamique (Rappel) :

1- Moment d'une force :

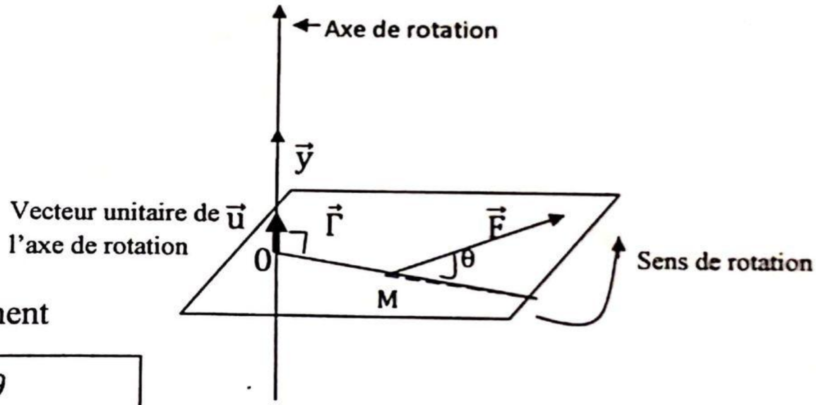
Soit $\overrightarrow{F}$, une force appliqué à un corps (c) de masse m. au point (M), le corps est en rotation auteur d'un point O. Le moment de la force $\vec{F}$ par apport au point (0) est définit par

$$\mu_{f/0} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{\Gamma} \wedge \vec{F} \text{ (c'est un produit vectoriel)}$$

$$\vec{\Gamma} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \qquad \vec{F} = \begin{vmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{vmatrix}$$

$$\mu^{\vec{\Gamma}}/_0 = \begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yFz - zF_x)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xFy - yF_x)\vec{k}$$

$$= \begin{pmatrix} yFz - zF_y \\ zFx - xF_z \\ xFy - yFx \end{pmatrix}$$



Règle de la main droite

Le module du vecteur moment

$$\boxed{\mu_{f/0} = \Gamma . F . \sin\theta}$$

les (02) principes de la dynamique :

1^{ere} principe : $\sum \vec{f}_{ext} = m\gamma$ (m^{vt} de translation)

$\sum \vec{F}_{ext}$: Force extérieure résultante $\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{\gamma}$

$\vec{\gamma}$: Accélération linéaire

2ème principe : $\sum \aleph^{\vec{F}_{ext}}/_0 = I_0 \ddot{\theta}\,\vec{u}$ (m^{vt} de rotation)

I_0 : Moment d'inertie du système en point 0.

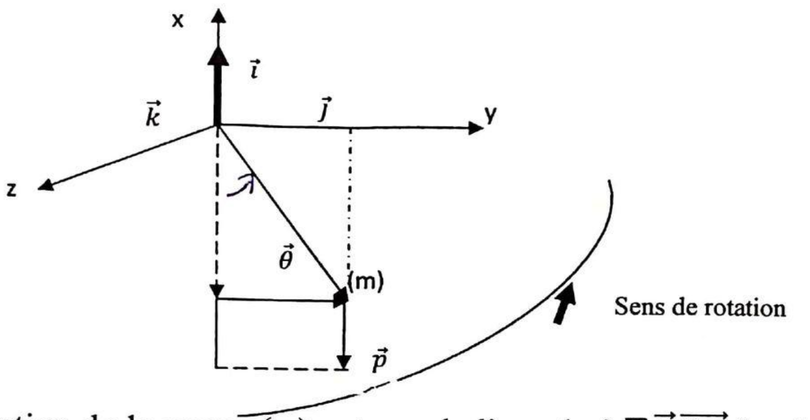
$\ddot{\theta}$: accélération angulair

$\vec{u}$: Vecteur unitaire du l'axe de rotation

<u>3</u>

<u>3^eme Application</u> : détermination de l'équation de Mouvement par la méthode des lois fondamentales de la dynamique

<u>Pendule simple.</u>

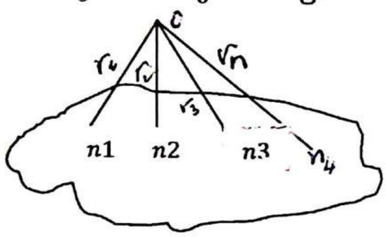


M^{vt} : de rotation de la masse (m) autour de l'axe (ox) $\sum \vec{\aleph}\overrightarrow{F_{ex}}/_0 = I_0\ddot{\theta}\vec{\mu}$

$$\sum \vec{\aleph}\overrightarrow{F_{ex}}/_0 = \vec{\aleph}P/_0 = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ l\sin\theta \\ -l\cos\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mgl\sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -mgl\sin\theta\vec{i}$$

L'axe de rotation $(0x) = \vec{i} \Rightarrow mgl\sin\theta\,\vec{i} = I_0\ddot{O}\vec{i} \Rightarrow I_0\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$

La Définition $\quad I_0 = \sum_{i=1;n} m_i r_i^2$



<u>Pour un solide</u>

$$I_o = \int r^2\,dm$$

Ou $\quad dm = \rho\,dv$, $\quad$ **ρ** : densité du solide

dv : élément de volume du solide

dm : élément de masse du solide

$$\boxed{I_0 = \int \rho\, r^2\, dV}$$

EX: Cas du pendule simple : on a une seul particule $I_0 = m\,r^2$, $l = r$
Pour linéariser l'équation ; oscillation de faible amplitude $\theta \ll 0$ $\boldsymbol{\sin\theta \approx \theta}$ et $\boldsymbol{\cos\theta} \approx 1$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\theta = 0$ Équation différentiel du 2nd ordre

$\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0$ $\omega_0 = \sqrt{g/l}$: pulsation propre des oscillations

---

II-B/ le lagrangien d'un système mécanique :

1- définition : un système mécanique en mouvement est caractérisé par

a/ ses coordonnés généralisées : q

EX/ Mvt de translation : $q = x$ Mvt de rotation : $q = \theta$

En cordonnés généralisés $q = (r, \theta, \varphi)$

b/Son énergie cinétique :

$$\boxed{T = E_c = f(care\ de\ la\ vitesse)}$$

Ex : Mvt de translation : $E_{cT} = \frac{1}{2} m\,v^2$

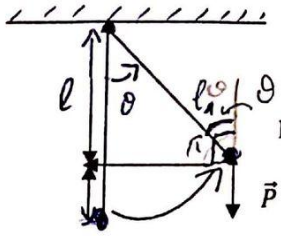
Ex : Mvt de rotation : $E_{cR} = \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2$

Ex : Mvt de translation et rotation : $E_c = E_{cT} + E_{cR}$

C/Son énergie potentielle :

$$\boxed{V = E_P = \text{fonction de ces positions}}$$

Ex : Masse



Position finale

Position initiale

$\sum \vec{\mathcal{M}}_{F_{ex}} = I\theta''\vec{n}$

$-\mathcal{M}_P = I\theta'' \Rightarrow -P\,l\sin\beta = I\theta''$

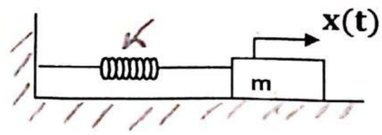
$\sin\beta$? or $\beta = \pi - \theta$

$\Rightarrow \sin\beta = \sin(\pi - \theta) = \cancel{\sin\pi}\cos\theta - \cos\pi\sin\theta$

$\left[\begin{array}{l}\sin\pi = 0 \\ \cos\pi = -1\end{array}\right.$

$\sin\beta = \cos\theta$ $m\,l^2\theta'' + P\,l\,\theta = 0$

(19) Donc $P\,l\cos\theta = m\,l^2\theta'' \Rightarrow$

Ex : **ressort** 

$E_{P_m} = mgh$

$E_{P_{res}} = \frac{1}{2} k\, x^2$

K : raideur du ressort x : Élongation du ressort

Masse + ressort : $E_P = E_{P_m} + E_{P_r}$

Le **lagrangien** d'un système mécanique en mouvement est définit par :

$L = E_c - E_p$ tq: $L = L(t, q, \dot{q})$ avec $\dot{q} = \frac{\delta q}{\delta t}$

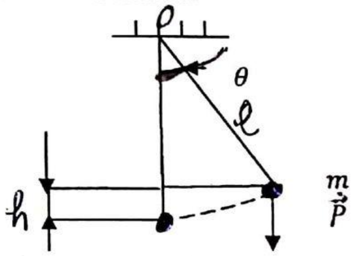
2/ Equation du mouvement :

Le Lagrangien d'un système mécanique en mouvement libre, vérifie l'équation :

$$\boxed{\frac{\delta}{\delta t}\left[\frac{\delta L}{\delta \dot{q}}\right] - \frac{\delta L}{\delta q} = 0 \qquad \text{Ou } \dot{q} = \frac{\delta q}{\delta t}}$$

application : Equation du mouvement du **pendule simple**

oscillations de faible amplitude : $(\theta \ll)$; mvt de rotation



$E_c = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2$ $L = L(t, \theta, \dot{\theta})$

$I_o = ml^2 \Rightarrow E_c = \frac{1}{2} m\, l^2 \theta^2$

$E_P = E_{P_m} = mgh$, $h = l - l\cos\theta = l(1 - \cos\theta) \Rightarrow E_p = mgl(1 - \cos\theta)$

Il faut linéariser $1 - \cos\theta$, on a $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2} \Rightarrow (1 - \cos 2x) = 2\sin^2(x)$

$\Rightarrow (1 - \cos\theta) = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$

Pour $\theta \ll$, $\frac{\sin\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2}$; $\left(\frac{\sin\theta}{2}\right)^2 \approx \frac{\theta^2}{4}$; $(1 - \cos\theta) = \frac{\theta^2}{4}$

$$E_p = mgl(1-\cos\boldsymbol{\theta}) = 2mgl\sin^2(\boldsymbol{\theta}/2)] = 2mgl\frac{\theta^2}{4} = mgl\ \frac{\theta^2}{2}$$

$$L = E_c - E_P = \frac{1}{2} m\, l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{mgl}{2}\theta^2$$

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}} = m\, l^2 \dot{\theta} + 0\ ; \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right] = ml^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial t} = ml^2 \ddot{\theta}\ ; \qquad \frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}} = mgl\boldsymbol{\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right] - \frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}} = 0 \quad \Rightarrow \quad ml^2 \ddot{\theta} + mgl\boldsymbol{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + {}^{g}/_{l}\ \theta = 0\ ; \qquad \ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \quad ; \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{{}^{g}/_{l}}$$

Conclusion :

On a deux méthodes pour déterminer l'équation différentielle du mouvement du système libre

-les lois fondamentales de la dynamique(**LFD**)

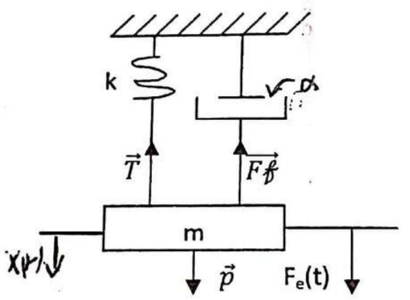
- méthode de **Lagrange**

II-3/ Oscillation harmonique forcés :

1°/ Définition :

Si, on plus de son propre poids(P), de la force de rappel du ressort (T) et de la force de frottement visqueux (F_f) : on applique à masse (m) une force d'excitation (Fe) ⟹le système est dit forcée.

2°/ Détermination de l'équation du M^{vt}



*** A l'équilibre statique (au repos)**

$$- Repos \Rightarrow v = 0 \Rightarrow F_f = \alpha\, v = 0$$

$$- La\ masse\ n'est pas\ escitée \Rightarrow Fe = 0$$

$$\Rightarrow P = T \Rightarrow P = K x_0$$

*** A l'équilibre dynamique (en Mvt)**

$$\varepsilon\vec{F} = m\vec{\gamma} \Rightarrow -T - F_f + P + Fe = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + K x + \overset{0}{\cancel{(Kx_0 - P)}} + \alpha\, x = Fe \Rightarrow m\ddot{x} + \alpha\, x' + Kx = Fe$$

$$\Rightarrow x + \frac{\alpha}{m}x' + \frac{k}{m}x = \frac{Fe}{m} \Rightarrow x + 2\delta x' + \omega_0^2 x = \frac{Fe}{m}$$

Equation différentielle linéaire du 2ème ordre avec second membre

$$Avec \quad 2\delta = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{2m} : (coeficient\ d'Amortissement)$$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \text{ pulsation propre du système}$$

3°/ Intégration de l'équation du mouvement :

a/ but : c'est recherche la solution générale de l'équation différentielle.

$x(t)=x_h(t)+x_p(t)$

$x(t)$: solution générale de l'équation différentielle.

$x_h(t)$: solution homogène ; c'est la solution du système libre (second membre=0)

$x_p(t)$: solution particulière de l'équation différentielle.

b/ solution homogène (x_h) :

(x_h) : solution de $x''_h + 2\lambda\, x'_h + \omega_0^2 x_h = 0$

C'est l'équation du système libre amortie ⇒ déjà étudier dans (II,2)

Rappel :

1^er cas : Δ> 0

$$si\ \alpha \gg \omega \Rightarrow amortissement\ fort \Rightarrow Régime\ Apériodique$$
$$x_h = e^{-\alpha t}\left[A\, e^{\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\,t} + B\, e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\,t}\right]$$

2^ème cas : Δ= 0

$$si\ \alpha = \omega_0 \Rightarrow Régime\ critique$$
$$x_h = e^{-\lambda t}[A + Bt]$$

3^ème cas : Δ< 0

$$si\ \alpha \ll \omega_0 \Rightarrow amortissement\ faible \Rightarrow Régime\ pseudopériodique$$
$$x_h = C\, e^{-\lambda t}\cos(wt + \varphi)$$

Conclusion :

On constate que dans les (03) cas la solution homogène (x_h) tend rapidement vers zéro lorsque le tend **(t) croit⇒ $x_h \longrightarrow 0$** rapidement lorsque (t) ↗

$x_{(h)}$: Décrit bien **le régime transitoire du système**

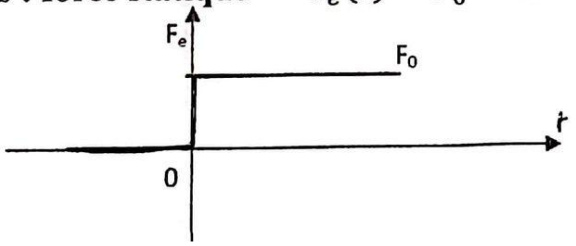
C/ Solution particulière : $x_p(t)$

La solution particulière dépend de la nature du second membre de l'équation différentielle $\left(\frac{F_{e\,(t)}}{m}\right)$

Req : $x_p(t)$ donne **le régime permanent du système** ⇒On va étudier deux types de forces d'excitations.

d/ Nature de la force d'excitation :

1^er cas : force statique $F_e(t) = F_0 = ct$



On à $x'' + 2\lambda\, x' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}$ $\Rightarrow$ $F_0/m = cst$ $\rightarrow$ $x_p = cst$ $\rightarrow$ $x'_p = x''_p = 0$

$x''_p + 2\lambda\, x'_p + \omega_0\, x_p = F_0/m$ $\rightarrow$ $x_p = F_0/m\omega_0$ or $\omega_0 = k/m$ $\rightarrow$ $x_p = F_0/m$

$\Rightarrow$ la solution générale $x(t) = x_h(t) + x_p(t) = x_h(t) + \frac{F_0}{K}$

Or $x_h(t) \longrightarrow 0$ *en temp très court* $\Rightarrow$ $x(t) = x_p(t) = {F_0}/{K}$

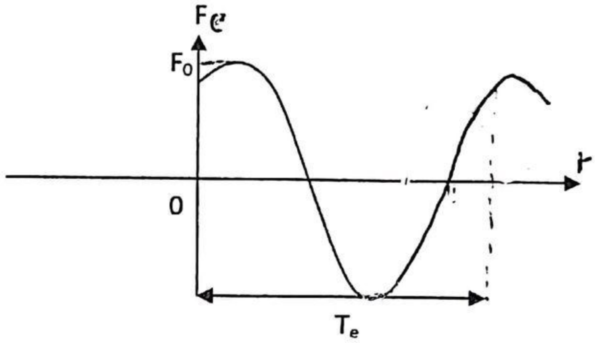
2ème cas/ force sinusoïdale

$F_e(t) = F_0 \cos(w_e t)$ *sinusoidale*

$\omega_0 = pulsation$ éscitatrice

$w_e = \dfrac{2\pi}{T_e}$; $T_e = \dfrac{1}{f_e}$

f_e: *fréquence éscitatrice*



- Equation du Mvt :

$$x'' + 2\lambda\, x' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_e t) \qquad (2)$$

second membre $\dfrac{F_0}{m}\cos\omega_e t$ *(sinusoidale)* $\Rightarrow x_p(t)$: *sinusodiale*

on choisie $x_p(t) = A\cos(\omega_e t + \varphi)$ Avec A? φ?

* Méthode des complexes :

$$x_p = A\cos(\omega_e t + \varphi) \sim \bar{X}_p = Ae^{j\omega e t}e^{j\varphi}$$

$\dfrac{F_0}{m}\cos w_e t \rightarrow \dfrac{F_0}{m}e^{j\,wet}$ On remplace dans l'équation (2) on obtient

$$\ddot{X}_P + 2\lambda\,\dot{X}_P + w_0^2\,X_P = \frac{F_0}{m}e^{jwet}$$

$$-A\omega_e^2 \cancel{e^{j\omega_e t}} e^{j\beta} + 2\lambda j \omega_e \cancel{e^{j\omega_e t}} e^{j\beta} + \omega_0^2 A \omega_e \cancel{e^{j\omega_e t}} e^{j\beta} = \frac{F_0}{m} \cancel{e^{j\omega_e t}}$$

$$\Rightarrow A e^{j\beta} = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega_e^2) + j2\lambda\omega_e}$$

En cas générale :

$$= \frac{Z_1}{Z_2} \Rightarrow |Z|e^{j\theta} = \frac{|Z_1|e^{j\varphi_1}}{|Z_1|e^{j\varphi_2}} \quad |Z| = \frac{Z_1}{Z_2} \Rightarrow et\ \theta = \varphi_1 - \varphi_2 = \mathrm{artg}\frac{B_1}{A_1} - \mathrm{artg}\frac{B_2}{A_2}$$

$$\Rightarrow le\ module\ A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_e^2)^2 + 4\lambda^2\omega_e^2}}$$

$$\Rightarrow argument\ \varphi = arctg\left(\frac{0}{F_0/m}\right)^0 - arctg\frac{2\lambda\,\omega_2}{\omega_0^2-\omega_e^2}$$

$$\Rightarrow \varphi = -arctg\frac{2\lambda\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2}$$

$$\Rightarrow \varphi = arctg\frac{2\lambda\omega_e}{\omega_e^2 - \omega_0^2} \quad avec\ 0 \le \varphi \le \pi$$

$$\boxed{X_p = \frac{F_0/m}{\sqrt{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4\lambda^2\omega_e^2}}} cos\left(\omega_e t + arctg\frac{2\lambda\omega_e}{\omega_e^2 - \omega_0^2}\right)}$$

<u>Conclusion :</u>

$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

$x(t) = x_h(t) + A\cos(\omega_e t + \varphi)$

or $x_h(t)$ solution homogène tend rapidement vers zéro $\Rightarrow$ c'est le régime transitoire.

$\Rightarrow$ si le temps croit $x_h(t) \nearrow 0\ et\ x(t) = x_p(t)$

$\Rightarrow$ *le mouvement de la masse est donnée par la solution particulière*

$\Rightarrow$ C'est le régime stationnaire.

Req : $F_e(t) = F_0 \cos(\omega_e t)$ *et* $x(t) = A \cos(\omega_e t + \varphi)$

$\Rightarrow$ les oscillations x(t) provoquées par la force $F_e(t)$ ont même fréquence (ω_e) mais en retard de phase φ par apport à $F_e(t)$.

$\Rightarrow$ les systèmes Forcés ne sont pas amortis.