Lam

Exo. 1 : Déterminer la vibration résultante Y résultat de la composition des vibrations Y1 et Y2 dont les équations sont respectivement :

$Y1 = 3\sin(wt)$ et $Y2 = 3\sin\left(wt + \frac{\pi}{3}\right)$

1°- Par la construction de Fresnel.
2°- Par le calcul direct.
3°- Par la méthode des complexes.

Exo. 2 : Trouver par calcul, par la méthode de Fresnel et par la méthode des complexes l'amplitude de la vibration :

$Y(t) = a\cos(wt) + a\cos\left(wt + \frac{2\pi}{3}\right) + a\cos\left(wt + \frac{4\pi}{3}\right)$

Exo. 3 : Calculer l'amplitude et la phase de la vibration résultante par la méthode des complexes

$X(t) = A\left(\cos(wt) + \cos(wt + f) + \cos(wt + 2f) + \cos(wt + 3f)\right)$

Exo. 4 : Calculer la somme S par la méthode des complexes, tel que :

$S = A_1\cos(wt) + A_2\cos(wt + f) + A_2\cos(wt - f)$

Exo.5 : On superpose deux vibrations $x_1(t) = a\cos(w_1 t)$ et $x_2(t) = a\cos(w_2 t)$ ou w_1 et w_2 sont très peu différentes. Calculer en fonction du temps l'amplitude résultante et retrouver le résultat par la méthode de Fresnel.

A.N : $w_1 = 102\ rd/s$; $w_2 = 101\ rd/s$

Calculer la période des battements T_b et le taux de modulation m.

Exo. 6 : A- On établit entre les plaques verticales d'un oscilloscope une tension $X(t) = A\cos(wt)$ et entre les plaques horizontales une tension $Y(t) = A\cos(wt + f)$. Indiquer suivant les valeurs de f la courbe observée sur l'écran. Etudier les cas :

$f = 0$, $f = \frac{\pi}{2}$, $f = \pi$, $0 < f < \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} < f < \pi$.

B- On superpose cette fois deux vibrations rectangulaires d'amplitudes différentes :

$X(t) = A\cos(wt)$ et $Y(t) = B\cos(wt + f)$

Etudier la courbe observée à l'oscilloscope.

****

Solution du TD N°1

****

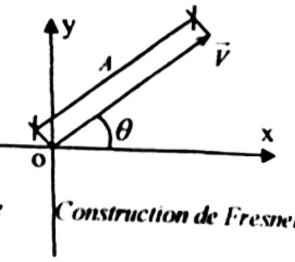
Exo. 1 : Détermination de la vibration résultante Y des deux vibrations Y1 et Y2 :

On cherche donc la résultante Y qui est égale à : Y=Y1+Y2 par les trois méthodes.

1°- Méthode de Fresnel :

Fresnel a supposé que une vibration de la forme $Y = A\sin(wt + \theta)$ est représentée par un vecteur tel que son module égale à l'amplitude "A" et l'angle qui fait avec l'horizontale égale à θ.

$$Y = A\sin(wt+\theta) \to \vec{V} \begin{cases} \|\vec{V}\| = A \\ \underbrace{(\vec{V}, \vec{ox})}_{\text{l'angle entre } \vec{V} \text{ et } \vec{ox}} \end{cases}$$



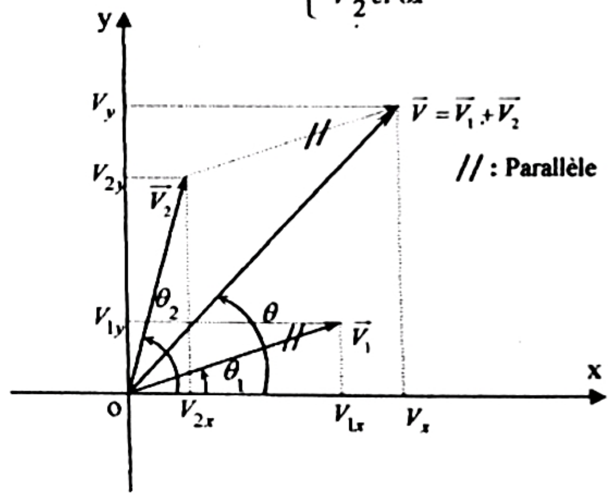
Construction de Fresnel

Donc même chose pour notre cas on trouve :

$$Y1 = 3\sin\left(wt + \underset{\theta_1}{0}\right) \text{ et } Y2 = 3\sin\left(wt + \underset{\theta_2}{\frac{\pi}{3}}\right)$$

$$Y_1 = \underset{A_1}{3}\sin\left(wt + \underset{\theta_1}{0}\right) \to \vec{V_1} \begin{cases} \|\vec{V_1}\| = A_1 = 3 \\ \underbrace{(\vec{V_1}, \vec{ox})}_{\text{l'angle entre } \vec{V_1} \text{ et } \vec{ox}} = \theta_1 \end{cases}$$

$$Y2 = \underset{A_2}{3}\sin\left(wt + \underset{\theta_2}{\frac{\pi}{3}}\right) \to \vec{V_2} \begin{cases} \|\vec{V_2}\| = A_2 = A_1 = 3 \\ \underbrace{(\vec{V_2}, \vec{ox})}_{\text{l'angle entre } \vec{V_2} \text{ et } \vec{ox}} = \theta_2 \end{cases}$$



Donc le vecteur résultant $\vec V$ égale à la somme des deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ c'est-à-dire : $\vec V = \vec{V_1} + \vec{V_2}$.

Ce vecteur résultant représente la vibration résultante $Y = A\sin(wt + \theta)$ tel que :

$$\begin{cases} \|\vec{V}\| = A \\ \underbrace{(\vec{V}, \vec{ox})}_{\text{l'angle entre } \vec{V} \text{ et } \vec{ox}} = \theta \end{cases} \Rightarrow \text{Détermination des}$$

composantes du vecteur résultant $\vec V$.

On a : $\vec{V_1}\begin{cases} V_{1x} = \|\vec{V_1}\|\cos\theta_1 = 3\cos(0) = 3 \\ V_{1y} = \|\vec{V_1}\|\sin\theta_1 = 3\sin(0) = 0 \end{cases}$

$\vec{V_2}\begin{cases} V_{2x} = \|\vec{V_2}\|\cos\theta_2 = 3\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{3}{2} \\ V_{2y} = \|\vec{V_2}\|\sin\theta_2 = 3\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Donc le vecteur résultant $\vec{V}$ égale :

$$\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2} = \begin{pmatrix} V_{1x} \\ V_{1y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{2x} \\ V_{2y} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A = \|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^{\ 2} + V_y^{\ 2}} = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ tg\theta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{9}{2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{27}{4}} \\ tg\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} A = \sqrt{\frac{108}{4}} \\ tg\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3\sqrt{3} \\ \theta = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

Alors la vibration résultante Y s'écrit :

$$Y = A\sin\theta = 3\sqrt{3}\sin\left(wt + \frac{\pi}{6}\right)$$

2°- Calcul direct :

Dans cette méthode on utilise les transformations trigonométriques pour calculer la somme :

$$Y = Y_1 + Y_2 \Rightarrow$$

$$Y = 3\sin(wt) + 3\sin\left(wt + \frac{\pi}{3}\right) = A\sin(wt + \theta)$$

$$\Rightarrow \quad 3\sin(wt) + 3\sin\left(wt + \frac{\pi}{3}\right) = A\sin(wt + \theta)$$

On développe les deux membres de l'équation en se basant sur les transformations trigonométriques suivantes: $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

$$\Rightarrow 3\sin(wt) + 3\left(\sin wt\cos\frac{\pi}{3} + \cos wt\sin\frac{\pi}{3}\right) = A(\sin wt\cos\theta + \cos wt\sin\theta)$$

$$\Rightarrow 3\sin(wt) + 3\left(\sin wt\,\frac{1}{2} + \cos wt\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = A\sin wt\cos\theta + A\cos wt\sin\theta$$

$$\Rightarrow 3\sin(wt) + \frac{3}{2}\sin wt + \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos wt = A\sin wt\cos\theta + A\cos wt\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{9}{2}\sin wt + \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos wt = A\cos\theta\sin wt + A\sin\theta\cos wt$$

Par comparaison des deux membres de l'équation

on trouve : $\begin{cases} A\cos\theta = \frac{9}{2} & (1) \\ A\sin\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} & (2) \end{cases}$

Donc on a deux équations à deux inconnues, facile à résoudre :

- Pour déterminer" A" , on fait la somme des carrés des deux équations (1) et (2), alors on a :

$$(A\cos\theta)^2 + (A\sin\theta)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$A^2\left[(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2\right] = \left(\frac{81}{4}\right) + \left(\frac{27}{4}\right) \Rightarrow$$

$$A^2 = \left(\frac{108}{4}\right) \Rightarrow \boxed{A = 3\sqrt{3}}$$

- Pour déterminer l'angle θ on fait la division de (2) sur (1) on trouve :

$$\frac{A\sin\theta}{A\cos\theta} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{9}{2}} \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow tg\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{6}}$$

Alors la vibration résultante Y s'écrit :

$$Y = A\sin\theta = 3\sqrt{3}\sin\left(wt + \frac{\pi}{6}\right)$$

3°- Méthode des complexes :

Cette méthode est basée sur des relations sur les nombres complexes. On suppose le nombre complexe "Z" qui a plusieurs écritures tels que :

$Z = A + jB$: Forme algébrique

$Z = r(\cos\theta + j\sin\theta) = re^{j\theta}$ forme trigonométrique

A , $r\cos\theta$: partie réelle.

B , $r\sin\theta$: partie imaginaire.

$r = \sqrt{A^2 + B^2}$: Module du nombre complexe.

θ : Argument du nombre complexe, avec $tg\theta = \frac{B}{A}$

Dans notre étude on utilise la forme trigonométrique : $Z = r\,e^{\theta}$ pour calculer Y1+Y2.

On a alors :

$$\begin{cases} Y_1 = 3\sin(wt) & \rightarrow \textit{Partie Imaginaire de } 3e^{j(wt)} \\ Y_2 = 3\sin\left(wt + \frac{\pi}{3}\right) & \rightarrow \textit{Partie Imaginaire de } 3e^{j\left(wt+\frac{\pi}{3}\right)} \end{cases}$$

Donc la somme $Y = Y_1 + Y_2$ est de la forme :

$Y = A\sin(wt + \theta) \rightarrow$ *Partie Imaginaire de* $Ae^{j(wt+\theta)}$

$$\Rightarrow \quad Y = Y_1 + Y_2 = 3e^{j(wt)} + 3e^{j\left(wt+\frac{\pi}{3}\right)} = Ae^{j(wt+\theta)}$$

$$\Rightarrow \quad 3e^{j(wt)} + 3e^{j(wt)}e^{j(\pi/3)} = Ae^{j(wt)}e^{j(\theta)}$$

En divisant les deux membres sur $e^{j(wt)}$ on trouve

$$3 + 3e^{j(\pi/3)} = Ae^{j(\theta)}$$

Car on ne peut pas comparer les deux membres facilement, il faut développer ces derniers, alors :

$$3 + 3e^{j(\pi/3)} = Ae^{j(\theta)} \Rightarrow$$

$$3 + 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right) = A(\cos\theta + j\sin\theta)$$

$$3 + 3\cos\frac{\pi}{3} + 3\sin\frac{\pi}{3}j = A\cos\theta + A\sin\theta j \quad \Rightarrow$$

$$3 + \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}j = A\cos\theta + A\sin\theta j$$

$$\Rightarrow \quad \frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}j = A\cos\theta + A\sin\theta j$$

Par comparaison on trouve :

$$\begin{cases} A\cos\theta = \frac{9}{2} & (1) \\ A\sin\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} & (2) \end{cases}$$

Même chose que précédemment on aboutit à :

$$A = 3\sqrt{3} \quad et \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

alors la vibration résultante Y s'écrit :

$$Y = A\sin\theta = 3\sqrt{3}\sin\left(wt + \frac{\pi}{6}\right)$$

****

Exo. 2 : Calcul de l'amplitude de la vibration $Y(t)$ par les trois méthodes :

1°- Méthode de Fresnel :

$$Y(t) = \underbrace{a\cos(wt)}_{Y_1} + \underbrace{a\cos\left(wt + \frac{2\pi}{3}\right)}_{Y_2} + \underbrace{a\cos\left(wt + \frac{4\pi}{3}\right)}_{Y_3}$$

La vibration Y se compose de trois vibrations Y1, Y2 et Y3 tels que :

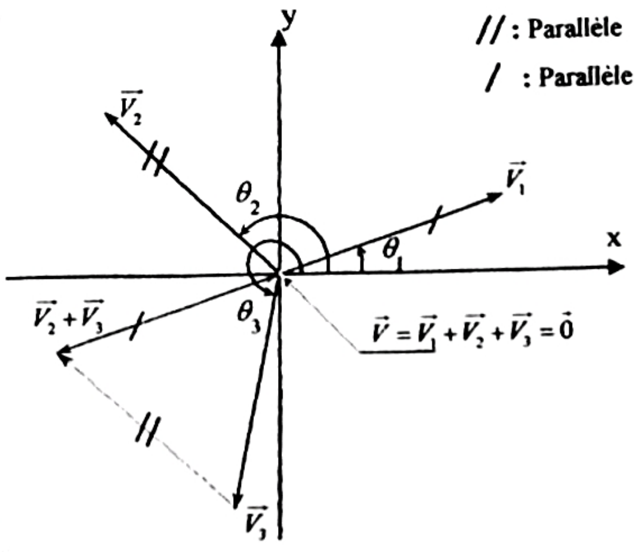
$$\begin{cases} Y_1 = \overset{A_1}{\widehat{a}}\cos\overbrace{(wt)}^{\theta_1} & \rightarrow \vec{V_1}\left\{\|\vec{V_1}\| = A_1\ ,\ (\vec{V_1},\vec{ox}) = \theta_1\right\} \\ Y_2 = \overset{A_2}{\widehat{a}}\cos\overbrace{\left(wt + \frac{2\pi}{3}\right)}^{\theta_2} & \rightarrow \vec{V_2}\left\{\|\vec{V_2}\| = A_2\ ,\ (\vec{V_2},\vec{ox}) = \theta_2\right\} \\ Y_3 = \underset{A_3}{\underline{a}}\cos\underbrace{\left(wt + \frac{4\pi}{3}\right)}_{\theta_3} & \rightarrow \vec{V_3}\left\{\|\vec{V_3}\| = A_3\ ,\ (\vec{V_3},\vec{ox}) = \theta_3\right\} \end{cases}$$

D'après le tracé de Fresnel on a :

$$\vec{V_1}\begin{cases} V_{1x} = \|\vec{V_1}\|\cos\theta_1 \\ V_{1y} = \|\vec{V_1}\|\sin\theta_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{V_1}\begin{cases} V_{1x} = a\cos(wt) \\ V_{1y} = a\sin(wt) \end{cases}$$

$$\vec{V_2}\begin{cases} V_{2x} = \|\vec{V_2}\|\cos\theta_2 \\ V_{2y} = \|\vec{V_2}\|\sin\theta_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{V_2}\begin{cases} V_{2x} = a\cos\left(wt + \frac{2\pi}{3}\right) \\ V_{2y} = a\sin\left(wt + \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

$$\vec{V_3}\begin{cases} V_{3x} = \|\vec{V_3}\|\cos\theta_3 \\ V_{3y} = \|\vec{V_3}\|\sin\theta_3 \end{cases} \Rightarrow \vec{V_3}\begin{cases} V_{3x} = a\cos\left(wt + \frac{4\pi}{3}\right) \\ V_{3y} = a\sin\left(wt + \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$



Alors le vecteur résultant $\vec{V}$ égale à :

$$\vec{V}=\vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3}=\begin{pmatrix}V_{1x}\\V_{1y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}V_{2x}\\V_{2y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}V_{3x}\\V_{3y}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\vec{V}=\begin{pmatrix}a\cos(wt)\\a\sin(wt)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\cos\left(wt+\frac{2\pi}{3}\right)\\a\sin\left(wt+\frac{2\pi}{3}\right)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\cos\left(wt+\frac{4\pi}{3}\right)\\a\sin\left(wt+\frac{4\pi}{3}\right)\end{pmatrix}$$

$$\vec{V}=\begin{pmatrix}a\left(\cos(wt)+\cos\left(wt+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(wt+\frac{4\pi}{3}\right)\right)\\a\left(\sin(wt)+\sin\left(wt+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(wt+\frac{4\pi}{3}\right)\right)\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\vec{V}=\begin{pmatrix}a\left(\cos(wt)+\cos\left(wt+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(wt+\frac{4\pi}{3}\right)\right)\\a\left(\sin(wt)+\sin\left(wt+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(wt+\frac{4\pi}{3}\right)\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}V_x\\V_y\end{pmatrix}$$

On développe les deux composantes du vecteur résultant en se basant sur les transformations trigonométriques suivantes:

$$\begin{cases}\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B\\\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B\end{cases}\Rightarrow$$

$$*V_x=a\begin{pmatrix}\cos(wt)+\left[\cos wt\cos\frac{2\pi}{3}-\sin wt\sin\frac{2\pi}{3}\right]+\\\left[\cos wt\cos\frac{4\pi}{3}-\sin wt\sin\frac{4\pi}{3}\right]\end{pmatrix}$$

$$V_x=a\begin{pmatrix}\cos(wt)+\left[-\frac{1}{2}\cos wt-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin wt\right]+\\\left[-\frac{1}{2}\cos wt+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin wt\right]\end{pmatrix}=0$$

$$*V_y=a\begin{pmatrix}\sin(wt)+\left[\sin wt\cos\frac{2\pi}{3}+\cos wt\sin\frac{2\pi}{3}\right]+\\\left[\sin wt\cos\frac{4\pi}{3}+\cos wt\sin\frac{4\pi}{3}\right]\end{pmatrix}$$

$$V_y=a\begin{pmatrix}\sin(wt)+\left[-\frac{1}{2}\sin wt+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos wt\right]+\\\left[-\frac{1}{2}\sin wt-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos wt\right]\end{pmatrix}=0$$

Donc le vecteur résultant est le vecteur nul $\vec{V}=\vec{0}$ de module $\|\vec{V}\|=0$ et d'angle $\theta=0$ avec l'axe $\overrightarrow{ox}$

Alors la vibration Y s'écrit :

$Y=A\sin\theta=0\cos(0)$

2°- Méthode direct :

Pour le calcul direct on utilise directement les transformations trigonométriques citées précédemment, alors on a :

$$Y(t)=a\cos(wt)+a\cos\left(wt+\frac{2\pi}{3}\right)+a\cos\left(wt+\frac{4\pi}{3}\right)\Rightarrow$$

$$Y(t)=a\cos(wt)+a\left[\cos wt\cos\frac{2\pi}{3}-\sin wt\sin\frac{2\pi}{3}\right]+$$
$$a\left[\cos wt\cos\frac{4\pi}{3}-\sin wt\sin\frac{4\pi}{3}\right]$$

$$\Rightarrow\quad Y(t)=a\cos(wt)+a\left[-\frac{1}{2}\cos wt-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin wt\right]+$$
$$a\left[-\frac{1}{2}\cos wt+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin wt\right]=0\cos 0$$

Donc la résultante est nulle.

3°- Méthodes des complexes :

$$Y(t)=\underbrace{a\cos(wt)}_{Y_1}+\underbrace{a\cos\left(wt+\frac{2\pi}{3}\right)}_{Y_2}+\underbrace{a\cos\left(wt+\frac{4\pi}{3}\right)}_{Y_3}$$

La vibration Y se compose de trois vibrations Y1, Y2 et Y3 tels que :

$$Y_1=a\cos(wt)\quad\rightarrow \textit{Partie Réelle de}\left[ae^{j(wt)}\right]$$

$$Y_2=a\cos\left(wt+\frac{2\pi}{3}\right)\rightarrow \textit{Partie Réelle de}\left[ae^{j\left(wt+\frac{2\pi}{3}\right)}\right]$$

$$Y_3=a\cos\left(wt+\frac{4\pi}{3}\right)\rightarrow \textit{Partie Réelle de}\left[ae^{j\left(wt+\frac{4\pi}{3}\right)}\right]$$

Donc la somme $Y(t)$ va être de la forme :

$$Y(t)=A\cos(wt+\theta)\quad\rightarrow \textit{Partie Réelle de}\left[Ae^{j(wt+\theta)}\right]$$

Ce qui nous donne pour la somme $Y(t)$:

$$Y(t)=ae^{j(wt)}+ae^{j\left(wt+\frac{2\pi}{3}\right)}+ae^{j\left(wt+\frac{4\pi}{3}\right)}=Ae^{j(wt+\theta)}$$

On développe un peu les termes on trouve :

$$ae^{j(wt)}+ae^{j(wt)}e^{j\left(\frac{2\pi}{3}\right)}+ae^{j(wt)}e^{j\left(\frac{4\pi}{3}\right)}=Ae^{j(wt)}e^{j(\theta)}$$

$$\Rightarrow\quad a+ae^{j\left(\frac{2\pi}{3}\right)}+ae^{j\left(\frac{4\pi}{3}\right)}=Ae^{j(\theta)}$$

$$\Rightarrow\quad a+a\left(\cos\frac{2\pi}{3}+j\sin\frac{2\pi}{3}\right)+a\left(\cos\frac{4\pi}{3}+j\sin\frac{4\pi}{3}\right)=$$
$$A(\cos\theta+j\sin\theta)$$

$$\Rightarrow a+a\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)+a\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)=A\cos\theta+A\sin\theta j$$

$\Rightarrow \quad 0+0j = A\cos\theta + A\sin\theta j$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\cos\theta=0 \\ A\sin\theta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ \theta=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \; Y(t) = A\cos(wt+\theta) = 0\cos 0$

****

Exo. 3 : Calcul de l'amplitude et de la phase résultante par la méthode des complexes :

$X(t) = A\left(\cos(wt) + \cos(wt+f) + \cos(wt+2f) + \cos(wt+3f)\right)$

On procède de la même manière que précédemment :

$$X(t) = A\left(\underbrace{\cos(wt)}_{\substack{\text{partie}\\\text{réelle de}\\ e^{j(wt)}}} + \underbrace{\cos(wt+f)}_{\substack{\text{partie}\\\text{réelle de}\\ e^{j(wt+f)}}} + \underbrace{\cos(wt+2f)}_{\substack{\text{partie}\\\text{réelle de}\\ e^{j(wt+2f)}}} + \underbrace{\cos(wt+3f)}_{\substack{\text{partie}\\\text{réelle de}\\ e^{j(wt+3f)}}}\right)$$

$$\Rightarrow X(t) = A\left(e^{j(wt)} + e^{j(wt+f)} + e^{j(wt+2f)} + e^{j(wt+3f)}\right)$$

$$= Be^{j(wt+\theta)}$$

$$\Rightarrow A\left(e^{j(wt)} + e^{j(wt)}e^{j(f)} + e^{j(wt)}e^{j(2f)} + e^{j(wt)}e^{j(3f)}\right) = Be^{j(wt)}e^{j(\theta)}$$

$$\Rightarrow A\left(1 + e^{j(f)} + e^{j(2f)} + e^{j(3f)}\right) = Be^{j(\theta)}$$

$$\Rightarrow A\left[1 + (\cos f + j\sin f) + (\cos 2f + j\sin 2f) + (\cos 3f + j\sin 3f)\right] = B(\cos\theta + j\sin\theta)$$

$$\Rightarrow A\left[(1+\cos f + \cos 2f + \cos 3f) + j(\sin f + \sin 2f + \sin 3f)\right] = B\cos\theta + B\sin\theta j$$

Ce qui nous donne par comparaison :

$$\Rightarrow \begin{cases} B\cos\theta = A(1+\cos f + \cos 2f + \cos 3f) \\ B\sin\theta = A(\sin f + \sin 2f + \sin 3f) \end{cases}$$

Exo. 5 :

Rappel :

Avant de passer à la résolution de l'exercice, on fait un rappel sur l'assemblage des vibrations :

Considérons deux vibrations x1(t) et x2(t) tels que :

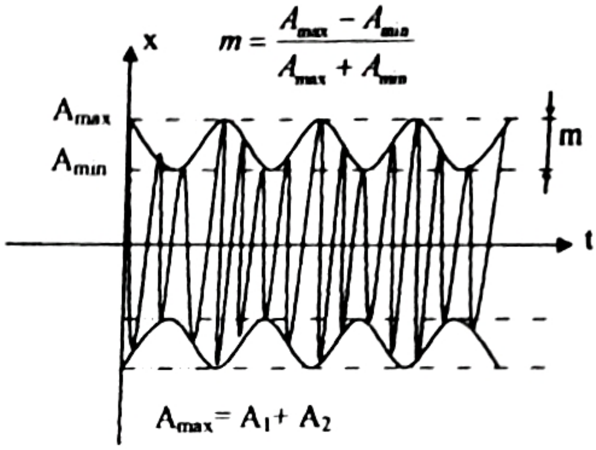
$x_1(t) = A_1\cos(w_1 t + \theta_1)$ et $x_2(t) = A_2\cos(w_2 t + \theta_2)$

La somme des deux donne :

$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1\cos(w_1 t + \theta_1) + A_2\cos(w_2 t + \theta_2)$

$x(t) = A(t)\cos(wt + \theta(t))$

Cette résultante a l'allure suivante :



On distingue deux cas :

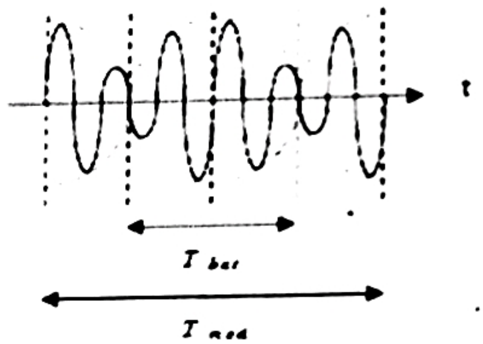
1^{er} cas **:** les amplitudes A1 et A2 sont égales :

Ce qui nous donne :

$A_{max} = 2A_1 = 2A_2 = 2a$

$A_{min} = 0$

Donc l'allure précédente devient ce qu'on appel un phénomène de battement qui a l'allure :

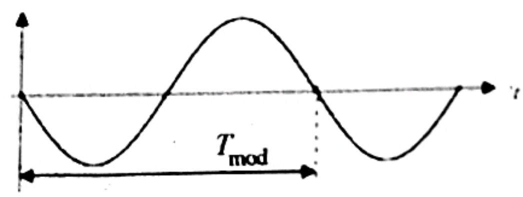


$x(t) = a\cos(w_1 t) + a\cos(w_2 t) = 2a\cos(w_{mod})t\cos(w_{moy})t$

$$\text{Avec : } \begin{cases} w_{mod} = \dfrac{w_1 - w_2}{2} \\ w_{moy} = \dfrac{w_1 + w_2}{2} \end{cases}$$

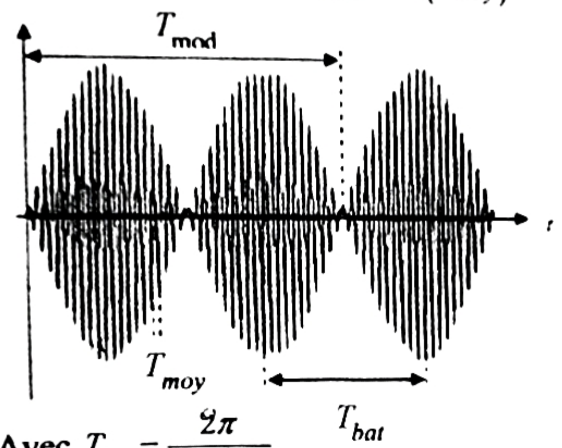
Où l'allure de chaque terme de la somme est :

1°- le terme $\cos(w_{mod})t$:



2°)- le terme : $\cos(w_{moy})t$

3°) la somme : $2a\cos(w_{mod})t\cos(w_{moy})t$



Avec $T_{bat} = \dfrac{2\pi}{w_1 - w_2}$

2ème cas : l'amplitude A1est trop supérieure à A2
Calcul en fonction du temps l'amplitude résultante des deux vibrations x1(t) et x2(t) de fréquence un peu différente:

On a :

$x_1(t) = a\cos\left(w_1 t\right)$; $x_2(t) = a\cos\left(w_2 t\right)$

Donc la somme de ces deux vibrations donne :

$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = a\cos\left(w_1 t\right) + a\cos\left(w_2 t\right) = A\cos wt$

En utilisant la transformation trigonométrique suivante : $\cos A + \cos B = 2\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)$

$$\Rightarrow x(t) = 2a\cos\left(\underbrace{\left(\frac{w_1 - w_2}{2}\right)}_{w_{mod}} t\right)\cos\left(\underbrace{\left(\frac{w_1 + w_2}{2}\right)}_{w_{moy}} t\right) = A\cos wt$$

$$\Rightarrow x(t) = 2a\cos\left(w_{mod}t\right)\cos\left(w_{moy}t\right) = A(t)\cos w_{moy}t$$

$$\Rightarrow A(t) = 2a\cos\left(w_{mod}t\right)$$

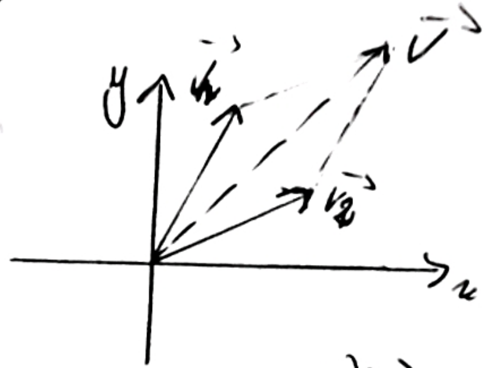
$x_1(t)=a\cos(\omega_1 t)$ $\quad$ $x_2(t)=a\cos(\omega_2 t)$

deux vibrations superposées avec $\omega_1 \simeq \omega_2$

1) A? par la méthode de Fresnel

$\vec V=\vec V_1+\vec V_2$ $\quad$ $x_1(t)=a\cos\omega_1 t \rightarrow \vec V_1 \begin{vmatrix} a \\ \omega_1\end{vmatrix}$

$x_2(t)=a\cos\omega_2 t \rightarrow \vec V_2 \begin{vmatrix} a \\ \omega_2\end{vmatrix}$



$\vec V_1 = \begin{pmatrix} a\cos\omega_1 t \\ a\sin\omega_1 t\end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec V_2 \begin{pmatrix} a\cos\omega_2 t \\ a\sin\omega_2 t\end{pmatrix}$

$\vec V = \vec V_1+\vec V_2 = (a\cos\omega_1 t + a\cos\omega_2 t)\vec i + (a\sin\omega_1 t + a\sin\omega_2 t)\vec j$

Après transformation trigonométrique on peut écrire $\vec V$ sous la forme suivante

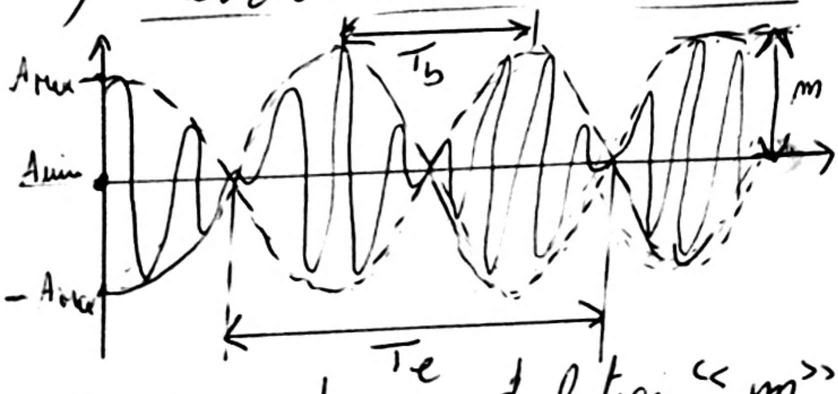
$$\vec V = \left[2a\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t\right]\vec i + \left[2a\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t\right]\vec j$$

$$|\vec V|^2 = 4a^2\cos^2\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\cos^2\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t + 4a^2\cos^2\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\sin^2\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t$$

$$= 4a^2\cos^2\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\underbrace{\left[\cos^2\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t + \sin^2\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t\right]}_{1}$$

Donc $A = |\vec V| = 2a\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t$

2) Periode de battement



$\boxed{T_b = \frac{T_e}{2}}$ or $T_e = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1-\omega_2}{2}}$

$T_e = \frac{4\pi}{\omega_1-\omega_2} = \frac{4\pi}{102.101} = 4\pi$

$\Rightarrow T_b = \frac{T_e}{2} \Rightarrow T_b = 2\pi$

3) Taux de modulation « m »)

$m = \left|\frac{A_{max}-A_{min}}{A_{max}+A_{min}}\right|$ $\quad$ or $A_{max} = A_1 + A_2 = a + a = 2a$

$A_{min} = A_1 - A_2 = a - a = 0$

$m = \frac{2a-0}{2a-0} = 1$ on a une modulation parfaite