Communication Numérique

Partie 1

Transmission numérique en bande de base

1. Message numérique

Un message numérique est défini comme une suite d'éléments pouvant prendre une parmi Q valeurs possibles.

On appelle alphabet l'ensemble de ces valeurs.

2. Chaine de transmission numérique

Le schéma de principe d'une chaine de transmission numérique est représenté dans la figure ci-dessous.

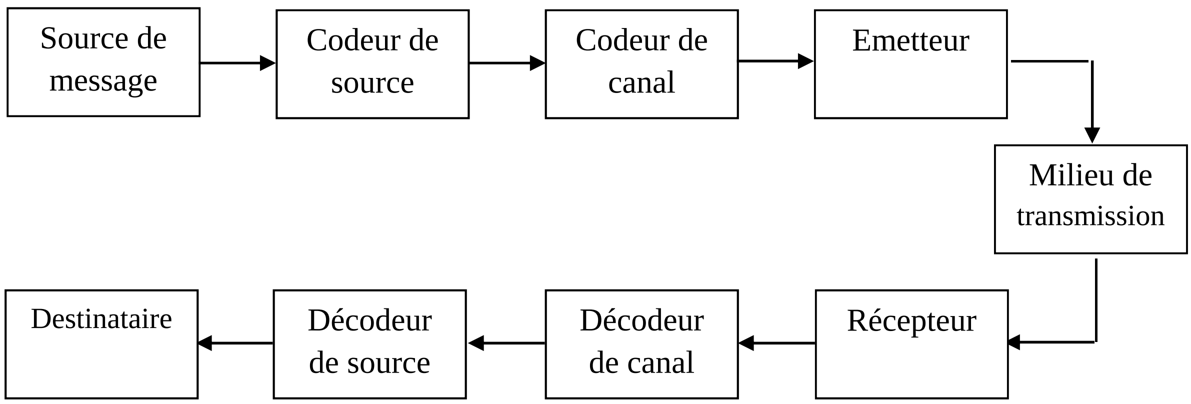


Figure 1. Chaine de transmission numérique.

La source de message, le milieu de transmission et le destinataire sont des données du problème, alors que le codage et le décodage de source, le codage et le décodage du canal, l'émetteur et le récepteur représentent des degrés de liberté du concepteur pour réaliser le système de transmission.

2.1. Source de message

Pour réaliser une transmission numérique et si la source délivre un message analogique tel que le signal de parole (sortie d'un microphone) ou le signal d'image (sortie d'une caméra), il faut le numériser.

Nous rappelons que la numérisation se fait en échantillonnant le message analogique puis on quantifie les échantillons obtenus. Chaque échantillon quantifié est ensuite codé sur *m* éléments binaires (appelés bits).

Les principales étapes de la numérisation d'un signal analogique sont résumées sur la figure ci-dessous :

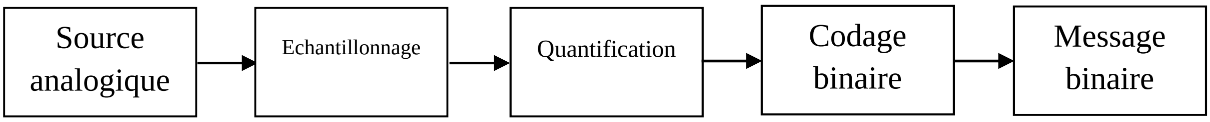


Figure 2. Principe de la numérisation d'une source analogique.

2.2. Codage de source

Le principe de codage de source qui trouve ces fondements dans la théorie de l'information ne sera pas abordé dans ce cours. Disons simplement qu'après codage de source, certains éléments binaires peut significatif du message ont été supprimés. Me message est alors sous forme concise. Après numérisation et codage, la source de message numérique est caractérisée par son débit binaire D définit comme étant le nombre d'éléments binaires quel émet par unité de temps. L'unité de débit binaire est bit par seconde.

Si l'intervalle de temps séparant l'émission par la source de deux éléments binaires consécutifs est constant est égale à T_b, alors le débit binaire est :

$$D = \frac{1}{T_b}\ bit/s$$

Une transmission est dite synchrone si l'émission d'éléments binaires par la source s'effectue à cadence constante, c'est-à-dire à raison d'un élément binaire tous les T_b secondes. Elle est dite asynchrone lorsque la cadence d'émission est variable dans le temps. Dans ce cours, nous nous placerons dans l'hypothèse de transmission synchrone et nous désignerons désormais par $\propto_k$ l'élément binaire émis à l'instant kT_b.

Exemple

La numérisation du signal de parole, préalablement limité à la bande 300-3400 Hz en téléphonie, est réalisé en échantillonnant ce signal à la fréquence de 8 KHz puis en codant les échantillons quantifiés sur *m* = 8 bits. Ainsi après numérisation le signal de parole est transformé en une source numérique ayant un débit binaire de 64 Kbit/s. Avec un codage de source approprié, ce débit peut être réduit à 32 Kbit/s sans dégradation de la qualité subjective de la parole. Des algorithmes permettant d'atteindre des débits de 16 et 8 Kbit/s ont même été adaptés récemment par les organismes internationaux de normalisation. Pour la radiotéléphonie cellulaire numérique européenne (GSM), ce débit a été ramené à 13 Kbit/s. Des études en cours sur le codage de la parole ont montré que des débits de 5 Kbit/s pouvaient être atteints en conservant une qualité subjective de la parole tout à fait acceptable pour des applications spécifiques ne nécessitant pas la même qualité que celle exigée en téléphonie numérique (par exemple la messagerie électronique).

2.3. Codage de canal

Le codage de canal, aussi appelé codage détecteur et/ou correcteur d'erreurs, est une fonction spécifique des transmissions numériques qui n'a pas son équivalent en transmission analogique. Le codage canal consiste à insérer dans le message des éléments binaires dits de redondance suivant une loi donnée. Cette opération conduit donc à une augmentation du débit binaire de la transmission.

Le décodeur de canal, qui connait la loi de codage utilisé à l'émission, vient vérifier si cette loi est toujours respectée en réception. Si ce n'est pas le cas il détecte la présence d'erreurs de transmission qu'il peut corriger sous certaines conditions.

2.4. Emetteur

Le message numérique entant que suite d'éléments binaires est une grandeur abstraite. Pour transmettre ce message, il est donc nécessaire de lui associé une représentation physique sous forme d'un signal électrique (conversion bit/symbole).

2.5. Milieu de transmission

Il représente le lien physique entre l'émetteur et le récepteur. Il est pratiquement constitué par l'un des supports suivants :

Un câble bifilaire

Dont la bande passante est faible et qui est en générale réservé pour les transmissions à bas débit (inférieures à 2 Mbit/s sur les réseaux téléphoniques).

Un câble coaxial

Ce dernier possède une bande passante plus importante que le câble bifilaire et qui permet de réaliser des transmissions avec un débit relativement élevé : plusieurs centaines de Mhit/s (Jusqu'à 565 Mbit/s sur le réseau téléphonique entre lequel transite un grand nombre de communications).

Un fibre optique

Qui apparait aujourd'hui grâce à sa bande passante très élevée et sa faible atténuation comme un support très intéressant. Les fibres optiques sont de plus en plus utilisées pour les réseaux terrestres à grande capacité (plusieurs Gbit/s voir dans le futur plusieurs dizaines de Gbit/s) pour les câbles sous-marins où elles ont supplanté le câble coaxial ainsi que pour les réseaux de distributions (c'est-à-dire sur les liaisons entre centraux téléphoniques et abonnés).

L'espace libre

Ce dernier utilise la propagation d'une onde électromagnétique dans l'atmosphère. Ce milieu est généralement réservé aux transmissions par satellite ou par faisceaux hertziens ainsi qu'aux radiocommunications avec les mobiles.

2.6. Le récepteur

Le récepteur a pour fonction la reconstitution du message émis par la source à partir du signal reçu.

Le bruit est une perturbation aléatoire dont les origines sont le milieu de transmission (bruit externe), ou les dispositifs électroniques utilisés dans le récepteur (bruit interne). Parmi les sources de bruit externe, on peut citer les rayonnements divers captés par l'antenne (cas des transmissions en espace libre), les interférences éventuelles entre les différents utilisateurs du milieu de transmission, ou encore les bruits d'origine industriels (ligne à haute tention).

Le bruit interne a pour origine le mouvement brownien des électrons dans les composants passifs (résistance) et les composants actifs (amplificateur, filtre, mélangeur…).

Le bruit interne est généralement prépondérant dans les systèmes de transmission.

3. Transmission en bande de base

Une transmission en bande de base signifie que les symboles à émettre dans le canal de transmission ne subissent pas une translation de leur spectre autour d'une fréquence porteuse. Dans le cas d'une transmission par onde modulée, les symboles à emettre modulent une porteuse.

La transmission en bande de base VS la transmission par onde modulée.

4. Codes en ligne (conversion bits/symboles)

4.1. Principe des codes en ligne

Considérons la transmission d'un message constitué par une suite infinie (très longues) d'éléments binaires α_k émis à l'instant kT_b.

Le principe du codage en ligne consiste à associer à chaque élément binaire α_k du message un signal $s_i(t)$ de durée T_b (appelé symbole) choisis parmi un ensemble de deux signaux, en fonction de la valeur de l'élément binaire α_k.

$s_i(t) = 0 \; \forall \, t \; \notin \; [0, T_b], \qquad i = 0, 1$

L'opération réalisée par le codeur en ligne est alors la suivante :

Si $\alpha_k = 0$ émission du signal $s_0(t - kT_b)$

Si $\alpha_k = 1$ émission du signal $s_1(t - kT_b)$

Ainsi le signal émis par le codeur en ligne, s'écrit de la forme suivante :

$$e(t) = \sum_k s_{i(k)}(t - kT_b); \; i(k) = 0, 1$$

La valeur de l'indice $i(k)$ est fonction de la valeur de l'élément binaire α_k :

$i(k) = 0$ si $\alpha_k = 0$

$i(k) = 1$ si $\alpha_k = 1$

Pour les codes en lige présentés dans ce cours, les signaux $s_0(t)$ et $s_1(t)$ peuvent s'exprimer à partir d'une forme d'onde unique $h(t)$ dont la durée est évidemment égale à T_b :

$s_i(t) = A_i h(t) \; i = 0, 1$

Ainsi le signal $e(t)$ à la sortie du codeur en ligne s'écrit :

$$e(t) = \sum_k A_{i(k)} \, h(t - kT_b)$$

Afin de simplifier les notations, le double indice $i(k)$ est supprimé et le signal $e(t)$ s'écrit simplement de la manière suivante :

$$e(t) = \sum_k a_k \, h(t - kT_b)$$

où a_k est maintenant un symbole binaire prenant ses valeurs dans l'alphabet $\{A_0, A_1\}$ avec la convention suivante :

$a_k = A_0$ si $\alpha_k = 0$

$a_k = A_1$ si $\alpha_k = 1$

4.2. Code NRZ bipolaire

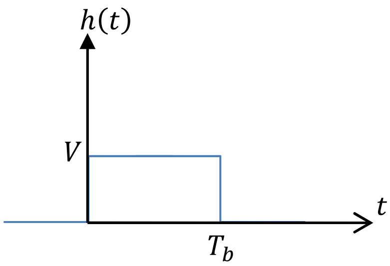
Pour ce code en ligne, à chaque élément binaire α_k du message, on associe un symbole a_k avec :

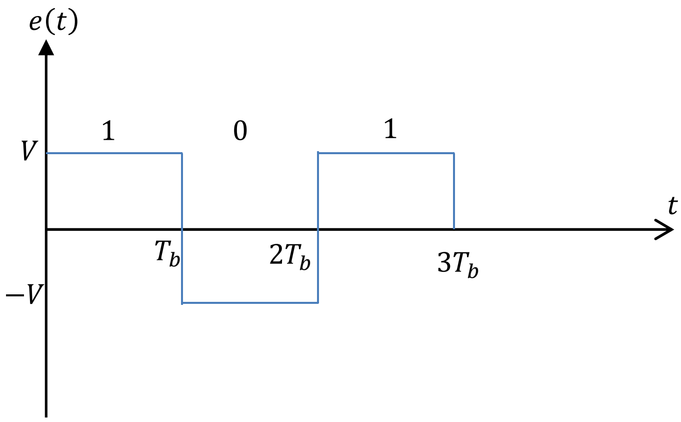
$a_k = 1$ si $\alpha_k = 1$

$a_k = -1$ si $\alpha_k = 0$

La forme d'onde $h(t)$ est une porte d'amplitude V et de durée T_b :

$$\begin{cases} V & \forall\, t \in [0, T_b[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$





4.3. Code NRZ unipolaire

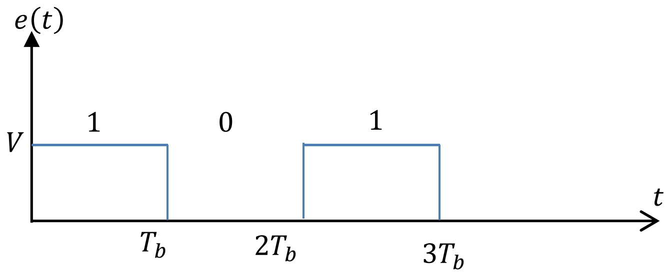
Pour ce code en ligne, à chaque élément binaire α_k du message, on associe un symbole a_k avec :

$a_k = 1$ si $\alpha_k = 1$

$a_k = 0$ si $\alpha_k = 0$

La forme d'onde $h(t)$ est une porte d'amplitude V et de durée T_b :

$$h(t) = \begin{cases} V & \forall\, t \in [0, T_b[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Valeur logique	Tension unipolaire
0	0
1	V

4.4. Code RZ unipolaire (retour à zéro)

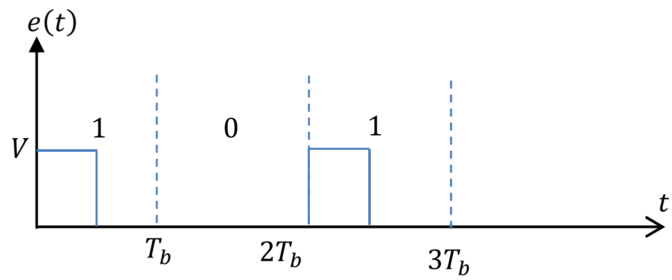
Pour ce code en ligne, à chaque élément binaire α_k du message, on associe un symbole a_k avec :

$a_k = 1$ si $\alpha_k = 1$

$a_k = 0$ si $\alpha_k = 0$

La forme d'onde $h(t)$ est un signal de durée T_b constitué par une porte d'amplitude V, de durée λT_b $(0 < \lambda \leq 1)$ suivie d'un retour à zéro de durée $(1 - \lambda)T_b$.

$$h(t) = \begin{cases} V & \forall\, t \in [0, \lambda T_b[\\ 0 & \forall\, t \in [\lambda T_b, T_b[\end{cases}$$



Chronogramme du code RZ unipolaire avec $\lambda = \frac{1}{2}$

4.5. Code biphase/Manchester

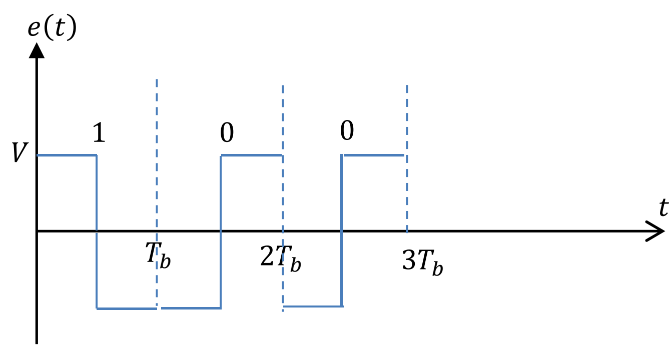
Ce code en ligne utilise la même règle de codage que le code NRZ bipolaire :

$a_k = 1$ si $\alpha_k = 1$

$a_k = -1$ si $\alpha_k = 0$

Mais la forme d'onde $h(t)$ a pour expression :

$$h(t) = \begin{cases} V & \forall\, t \in \left[0, \frac{T_b}{2}\right[\\ -V & \forall\, t \in \left[\frac{T_b}{2}, T_b\right[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



4.6. Code HDB3 (haute densité bipolaire d'ordre 3)

Dans ce code on interdit plus de 3 symboles a_k successifs nuls; le quatrième élément binaire α_k d'une suite de 000 consécutifs est codé par un symbole $a_k = \pm 1$. Le signe étant choisi de telle manière qu'il viole la règle d'alternance, on impose en outre au bit de viole de satisfaire entre eux la règle de l'alternance. Mais il se peut alors que le récepteur ne puisse pas reconnaitre un symbole de viole comme tel (s'il est de signe contraire au 1 précédent) ; dans ce cas on code le premier « 0 » de la suite des 4 « 0 » consécutifs avec un symbole $a_k = \pm 1$, du même signe que le viole qui lui succède. Ce symbole est appelé : symbole de « bourrage ». L'algorithme de codage est résumé ci-dessous.

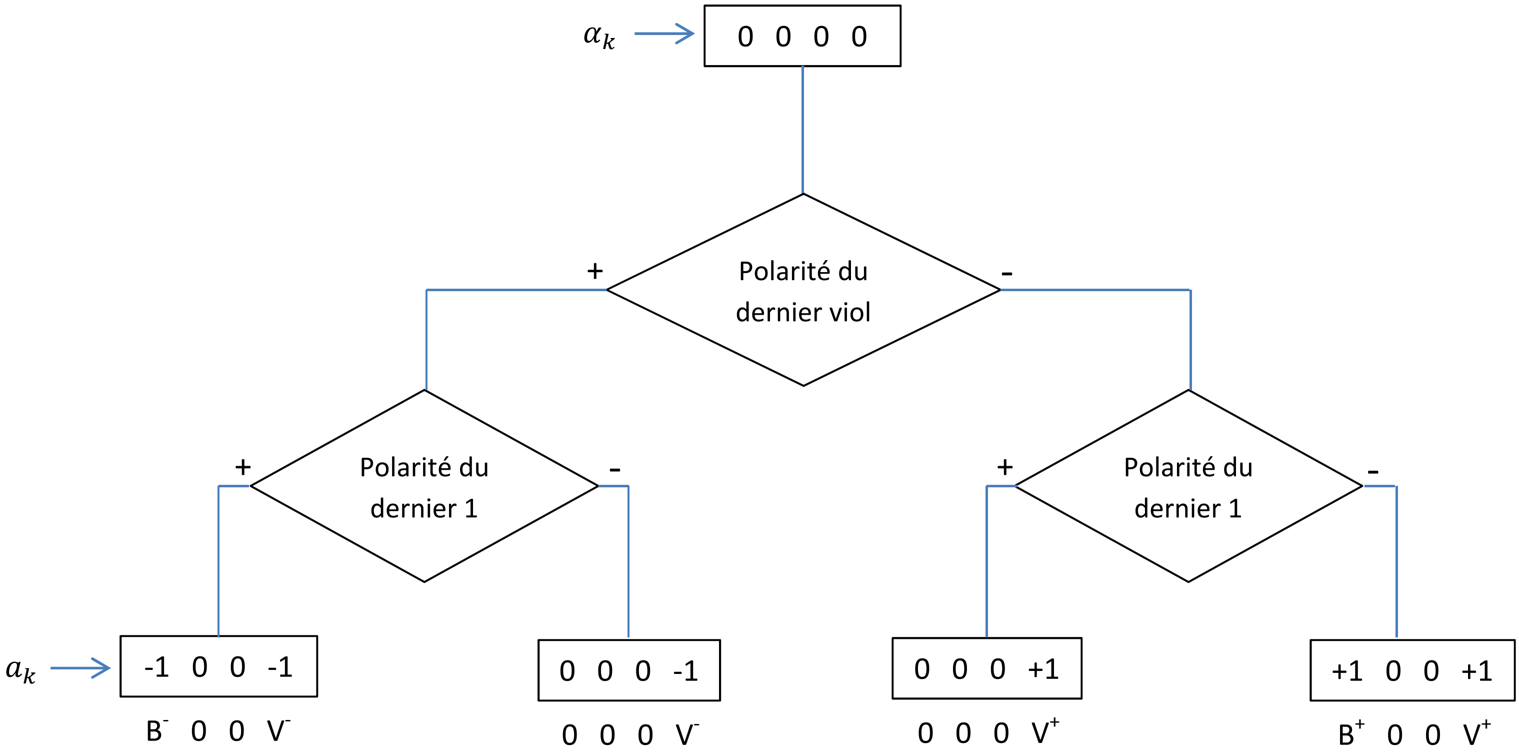


Figure : Algorithme du code HDB3

4.6. Code en ligne M-aire

Cette opération consiste a associé à chaque mot de n éléments binaires issu du message, un signal $s_i(t), i = 1, 2, \dots, m$ de durée $T = nT_b$ choisi parmi $M = 2^n$ signaux.

Le message binaire de débit D est donc représenté par un signal, dont on définit alors la rapidité de modulation R (exprimée en Baud) comme le nombre de signaux émis par unité de temps :

$$R = \frac{1}{T} \text{ (Baud)}$$

On parle alors de transmission M-aire et dans ce cas la rapidité de modulation R peut s'exprimé en fonction de débit binaire D par la relation :

$$R = \frac{D}{log_2 M}$$

$$M = 2^n \Rightarrow logM = nlog2 \Rightarrow n = \frac{log2}{logM}$$

4.7. Mesure de la qualité d’une transmission numérique

La qualité de transmission dépend de la fidélité avec laquelle les éléments binaires du message sont restitués au destinataire. Elle se mesure en générale en évaluant la probabilité d’erreur par élément binaire, définit comme la probabilité de prendre une décision erronée sur un élément binaire.

Modulations numériques à bande étroite

1. Principe

La modulation de porteuse, qu'elle soit analogique ou numérique, consiste à faire varier un paramètre d'une onde sinusoïdale, appelée onde porteuse, en fonction du signal qui constitue l'information à transmettre, appelée signal modulant. La grandeur qui peut être modulée est l'amplitude, la phase et la fréquence.

La caractéristique fondamentale d'une modulation numérique par rapport à une modulation analogique est que l'information à transmettre est discrète.

2. Modulation à déplacement d'amplitude (ASK)

L'abréviation ASK signifie en anglais ''Amplitude Shift keying''.

Soit la porteuse : $A_0 \cos(2\pi f_0 t + \psi_0)$

Et considérant le message numérique (signal modulant) : $A(t) = \sum_k a_k \, x(t - kT)$

Les $\{a_k\}$ désignent une suite de symbole M-aires et $x(t)$ représente dans tout ce qui suit une porte de durée T:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \in [0, T[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

ψ_0 est la phase de la porteuse à $t = 0$. Rappelons que $T = T_b log_2 M$.

L'onde modulée ASK est donnée par l'expression suivante :

$$u(t) = A(t)\cos(2\pi f_0 t + \psi_0) = \sum_k a_k \, x(t - kT)\cos(2\pi f_0 t + \psi_0)$$

Dans l'expression précédente, nous avons supposé que $A_0 = 1$.

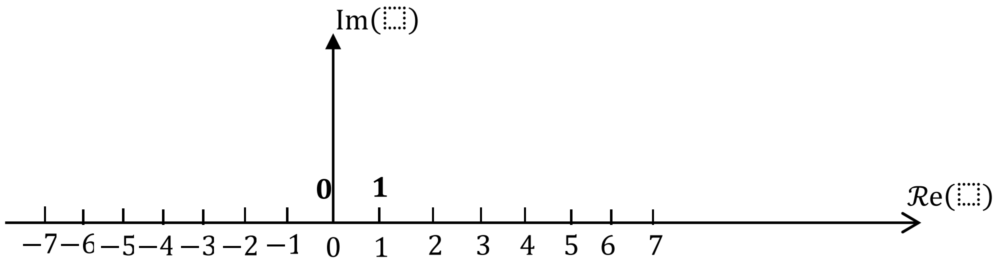
Chaque symbole a_k modifie l'amplitude de la porteuse durant une durée T : a_k correspond à l'amplitude de la porteuse pour $kT \leq t < (k+1)T$

2.1. Modulation ASK binaire (OOK)

L'abréviation OOK signifie en anglais ''On Off Keying''. Cette modulation est connue aussi sous le nom de modulation par tout ou rien.

Dans la modulation OOK, le symbole a_k prend les valeurs 0 ou 1. Le bit 0 correspond à une extinction de la porteuse.

Niveau logique (bit)	Symbol a_k
0	0
1	1



Exemple

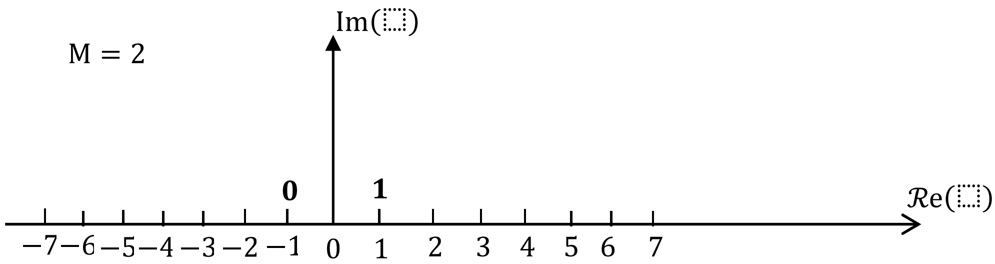
Soit la séquence binaire 0/1/0/1/0/0/1

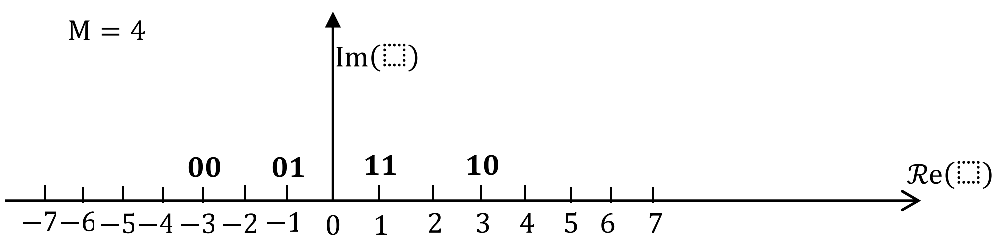
- Tracer l'allure du message numérique $A(t)$.

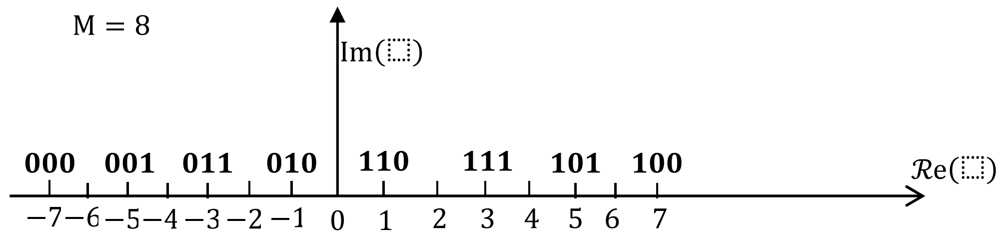
- Représenter l'onde modulée $u(t)$.

On considère dans l'exemple $A_0 = 1$, $\psi_0 = \frac{-\pi}{2}$, $T = 3T_0 = \frac{3}{f_0}$

2.2. Modulations M-ASK symétriques







Exemple

On considère la séquence binaire 00/01/11/10 (4-ASK).

- - Tracer l'allure du message numérique $A(t)$.

- Représenter l'onde modulée $u(t)$.

On considère dans l'exemple $A_0 = 1$, $\psi_0 = \frac{-\pi}{2}$, $T = 3T_0 = \frac{3}{f_0}$

Notons que tous les codes en ligne que nous avons vu au début de ce cours sont des modulations ASK avec $f_0 = 0$

2.3. ASK dans le domaine de Fourier

Considérons l'onde modulée ASK suivante :

$$u(t) = \sum_k a_k\, x(t - kT)\cos(2\pi f_0 t + \psi_0) = A(t)\cos(2\pi f_0 t + \psi_0)$$

Si on suppose que $\psi_0 = 0$, cette dernière se simplifie à

$$u(t) = \sum_k a_k\, x(t - kT)\cos(2\pi f_0 t) = A(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

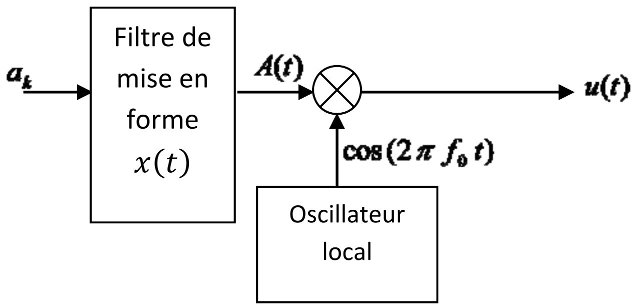
Si on considère que :

$$TF\{A(t)\} = \mathcal{A}(f)$$

Alors

$$TF\{u(t)\} = \frac{1}{2}\{\mathcal{A}(f - f_0) + \mathcal{A}(f + f_0)\}$$

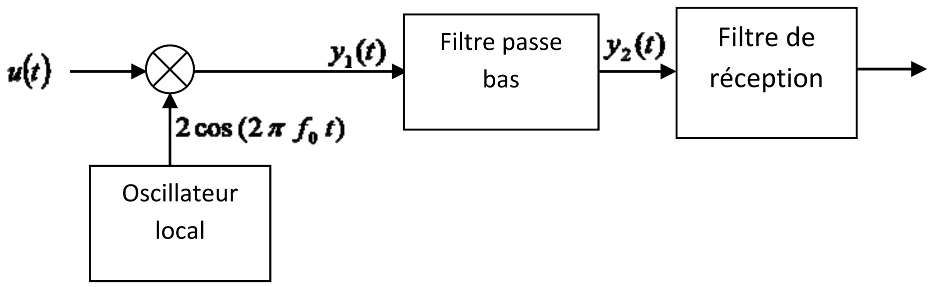
2.4. Modulateur ASK



$u(t) = A(t)\cos(2\pi f_0 t)$

$u(t) = \sum_k a_k\, x(t - kT)\cos(2\pi f_0 t)$

2.5. Démodulateur ASK



$y_1(t) = 2\,u(t)\cos(2\pi f_0 t)$

avec

$u(t) = A(t)\cos(2\pi f_0 t)$, donc l'expression de $y_1(t)$ devient :

$y_1(t) = 2\,A(t)\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 t) = 2\,A(t)(\cos(2\pi f_0 t))^2$

$\Rightarrow y_1(t) = A(t) + A(t)\cos(4\pi f_0 t)$

Après filtrage passe bas, on trouve

$y_2(t) = A(t)$

3. Modulation à déplacement d'amplitude (PSK)

L'abréviation PSK signifie en anglais ''Phase Shift keying''.

Soit la porteuse : $A_0 \cos(2\pi f_0 t)$

avec A_0 est l'amplitude de la porteuse. Et considérant le message numérique (signal modulant) :

$\Phi(t) = \sum_k \Phi_k \, x(t - kT)$ (1)

Φ_k correspond à la valeur de la phase pendant l'intervalle de temps $kT \leq t < (k+1)T$.

L'onde modulée est : $u(t) = A_0 \cos\big(2\pi f_0 t + \Phi(t)\big)$ (2)

La relation (2) s'écrit aussi de la manière équivalente suivante :

$$u(t) = A_0 \sum_k x(t - kT) \cos(2\pi f_0 t + \Phi_k)$$

L'amplitude de la porteuse change, mais la phase change toutes les T secondes.

3.1. Modulation ASK équivalente

L'onde modulée est : $u(t) = A_0 \sum_k x(t - kT) \cos(2\pi f_0 t + \Phi_k)$

Cette expression peut s'écrire sous la forme :

$$u(t) = A_0 \sum_k x(t - kT)\{\cos(2\pi f_0 t)\cos(\Phi_k) - \sin(2\pi f_0 t)\sin(\Phi_k)\}$$

On considère que $A_0 = 1$ donc on aura

$$u(t) = \sum_k \cos(\Phi_k)\, x(t - kT)\cos(2\pi f_0 t) - \sum_k \sin(\Phi_k)\, x(t - kT)\sin(2\pi f_0 t)$$

Cette écriture montre que l'onde modulée PSK peut être vue comme une combinaison linéaire de deux modulations ASK en quadrature. Le signal $l(t)$ modulant la porteuse $\cos(2\pi f_0 t)$ et le signal $Q(t)$ modulant la porteuse en quadrature (déphasée de $\frac{\pi}{2}$).

avec

$$l(t) = \sum_k \cos(\Phi_k)\, x(t - kT)$$

$$Q(t) = \sum_k \sin(\Phi_k)\, x(t - kT)$$

$$u(t) = l(t)\cos(2\pi f_0 t) - Q(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

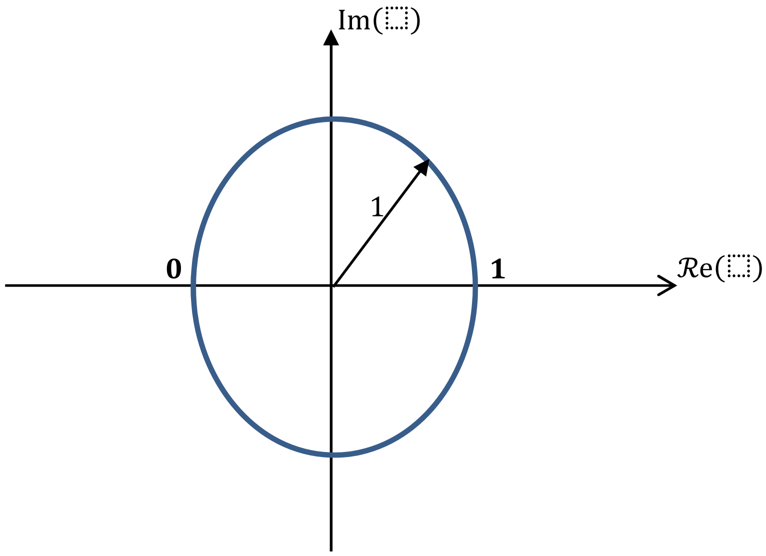
3.2. Choix des symboles

Les Φ_k représentent ici une phase. Dans ce cours, on considère que Φ_k prend des valeurs de la forme :

$$\frac{2\pi}{M}m \text{ avec } 0 \leq m \leq M-1$$

3.3. Modulation BPSK ou 2-PSK

L'abréviation BPSK signifie en anglais ''Binary Phase Shift keying''. La constellation représente en coordonnées polaires, les différents états de phase de la modulation



La modulation BPSK est semblable à la modulation 2-ASK symétrique.

Exemple

On considère la porteuse $A_0 \cos(2\pi f_0 t + \psi_0)$ avec $\psi_0 = \frac{-\pi}{2}$. On considère également que $T = T_b = \frac{2}{f_0}$.

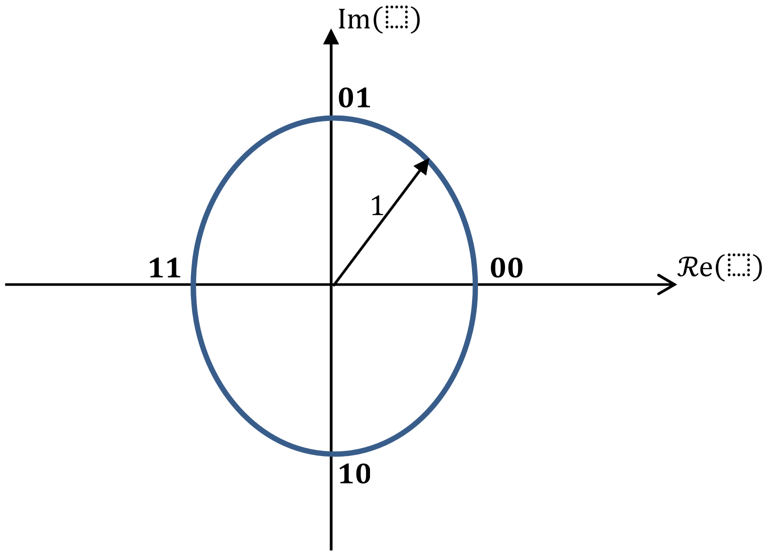
- Donner l'expression de l'onde modulée 2-PSK.

- Tracer l'onde modulée pour le cas d'un élément binaire $\alpha_k = 1$.

- Tracer l'onde modulée pour le cas d'un élément binaire $\alpha_k = 0$.

3.4. Modulation à déplacement de phase à quatre états

Elle est aussi appelée modulation quadriphase. Elle est désignée par 4-PSK ou QPSK. Dans ce cas, nous avons quatre états de phase correspondants aux quatre couples possibles de deux bits. Les quatre états de phase sont : 0, $\frac{\pi}{2}$, π et $\frac{-\pi}{2}$.



Exemple

Même exemple précédant, mais ici On considère que $T = 2\,T_b = \frac{1}{f_0}$.

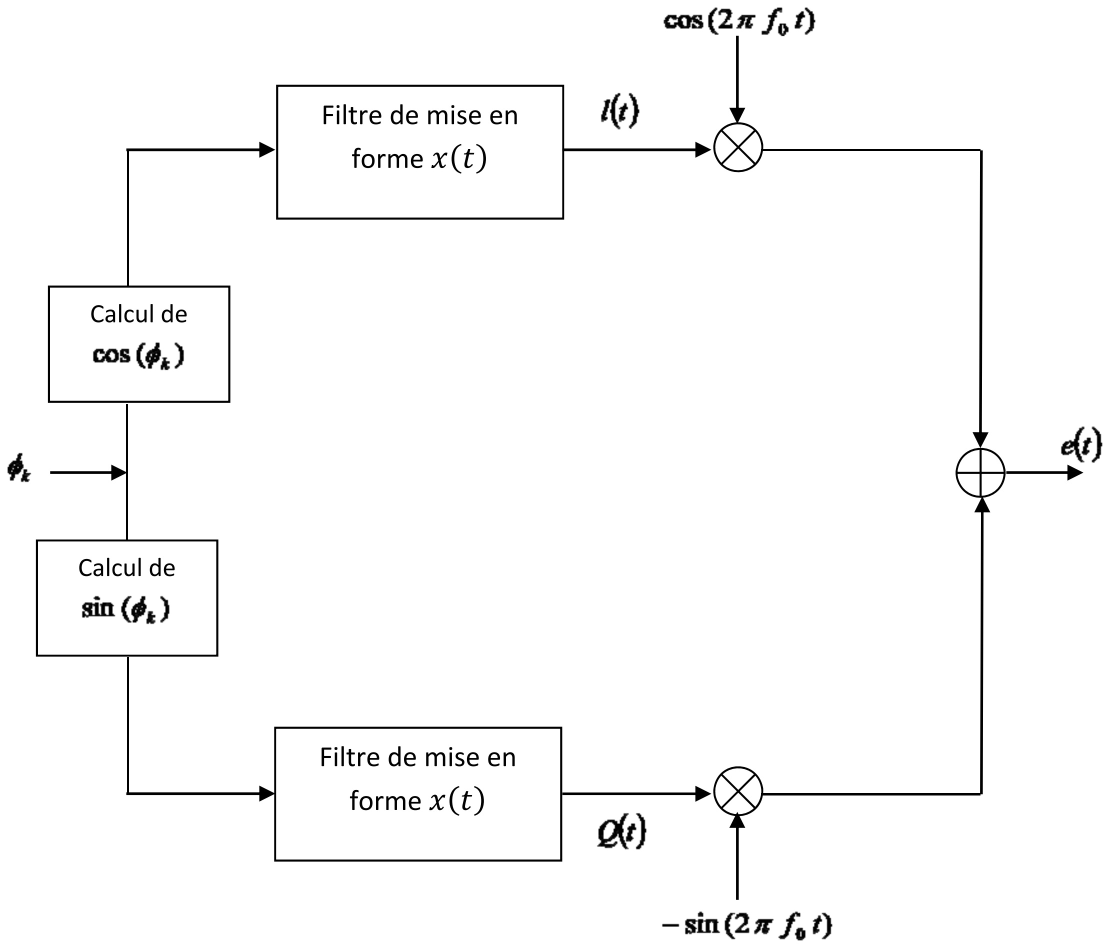
- Donner l'expression de l'onde modulée 4-PSK.

- Tracer l'onde modulée pour le cas d'un élément binaire $\alpha_k = 1$.

- Tracer l'onde modulée pour les cas 00, 01, 11 et 10.

3.5. Modulateur PSK

Le schéma synoptique du modulateur PSK est représenté dans la figure ci-dessous. Notons que deux oscillateurs sont nécessaires pour réaliser un modulateur PSK. Une autre solution est possible en utilisant uniquement un seul oscillateur avec un déphaseur de $\frac{\pi}{2}$.



$$l(t) = \sum_k \cos(\Phi_k)\, x(t - kT)$$

$$Q(t) = \sum_k \sin(\Phi_k)\, x(t - kT)$$

$$e(t) = l(t)\cos(2\pi f_0 t) - Q(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

En remplaçant les expressions de $l(t)$ et $Q(t)$ dans l'expression de $e(t)$, on trouve

$$e(t) = \sum_k \cos(\Phi_k)\, x(t - kT)\cos(2\pi f_0 t) - \sum_k \sin(\Phi_k)\, x(t - kT)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$e(t) = \sum_k x(t - kT)\{\cos(2\pi f_0 t)\cos(\Phi_k) - \sin(2\pi f_0 t)\sin(\Phi_k)\}$$

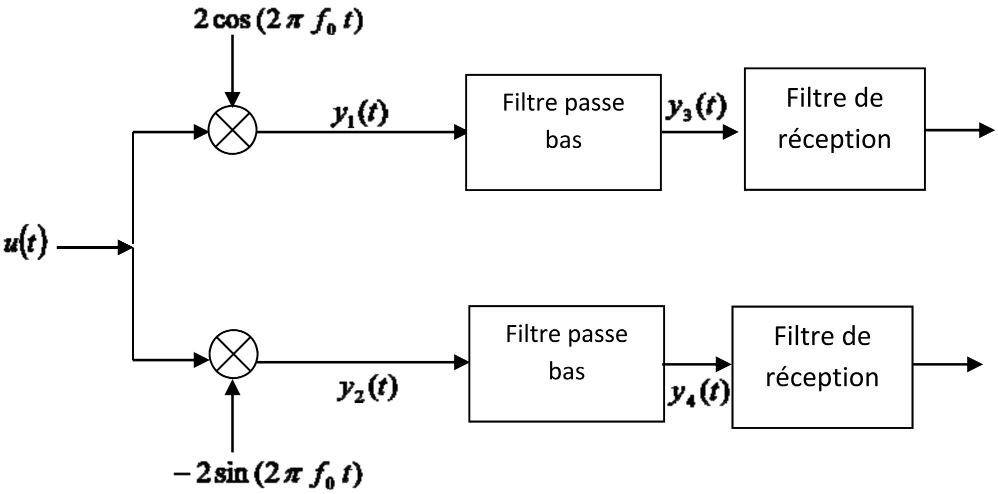
Donc l'expression finale de $e(t)$ est

$$u(t) = \sum_k x(t - kT)\cos(2\pi f_0 t + \Phi_k)$$

Cette dernière expression montre bien que la sortie du système est une onde modulée PSK.

3.6. Démodulateur PSK

Le schéma synoptique du démodulateur PSK est représentée dans la figure ci-dessous.



A partir du schéma synoptique de la figure ci-dessus, l'expression de $y_1(t)$ se calcule de la manière suivante :

$$y_1(t) = u(t)2\cos(2\pi f_0 t)$$

Pour l'expression de l'onde modulée PSK, on utilise l'expression suivante :

$$u(t) = l(t)\cos(2\pi f_0 t) - Q(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

Donc :

$$y_1(t) = 2l(t)\cos^2(2\pi f_0 t) - 2Q(t)\sin(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 t)$$
$$= l(t)\{1 + \cos(4\pi f_0 t)\} - Q(t)\sin(4\pi f_0 t)$$
$$= l(t) + l(t)\cos(4\pi f_0 t) - Q(t)\sin(4\pi f_0 t)$$

D'autre part, l'expression de $y_2(t)$ est obtenue comme suit

$$y_2(t) = -2u(t)\sin(2\pi f_0 t)$$
$$= -2l(t)\cos(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 t) + 2Q(t)\sin^2(2\pi f_0 t)$$
$$= -l(t)\sin(4\pi f_0 t) + Q(t)\{1 - \cos(4\pi f_0 t)\}$$
$$= Q(t) - l(t)\sin(4\pi f_0 t) - Q(t)\cos(4\pi f_0 t)$$

Après filtrage :

$$y_3(t) = l(t)$$
$$y_4(t) = Q(t)$$

4. Modulation d'amplitude à deux porteuses en quadrature QAM

L'abréviation QAM signifie en anglais ''Quadratique Amplitude Modulation''. Dans ce type de modulation le signal modulé s'écrit sous la forme :

$$u(t) = u_c(t)\cos(2\pi f_0 t) - u_s(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

avec :

$$u_c(t) = \sum_k a_k\, x(t - kT)$$

$$u_s(t) = \sum_k b_k\, x(t - kT)$$

$u(t)$ est la somme de deux porteuses en quadrature modulées en amplitude par les signaux $u_c(t)$ et $u_s(t)$.

Dans le cas où les a_k et b_k sont deux suites de symbole M-aires prenant leurs valeurs dans des alphabets à M éléments, on obtient ainsi une modulation à M^2 états, chacun de ceux-ci étant associé à un couple de deux symboles M-aires.

Puisque M est de la forme 2^n : dans ce cas chaque valeur possible de a_k est associé à un mot de n éléments binaires et chaque couple (a_k, b_k) est associé par conséquent à un mot de $2n$ éléments binaires.

Le signal émis pendant un intervalle de durée T peut être définit par les valeurs des deux symboles a_k et b_k ou par la valeur de son amplitude et de sa phase. On peut donc écrire :

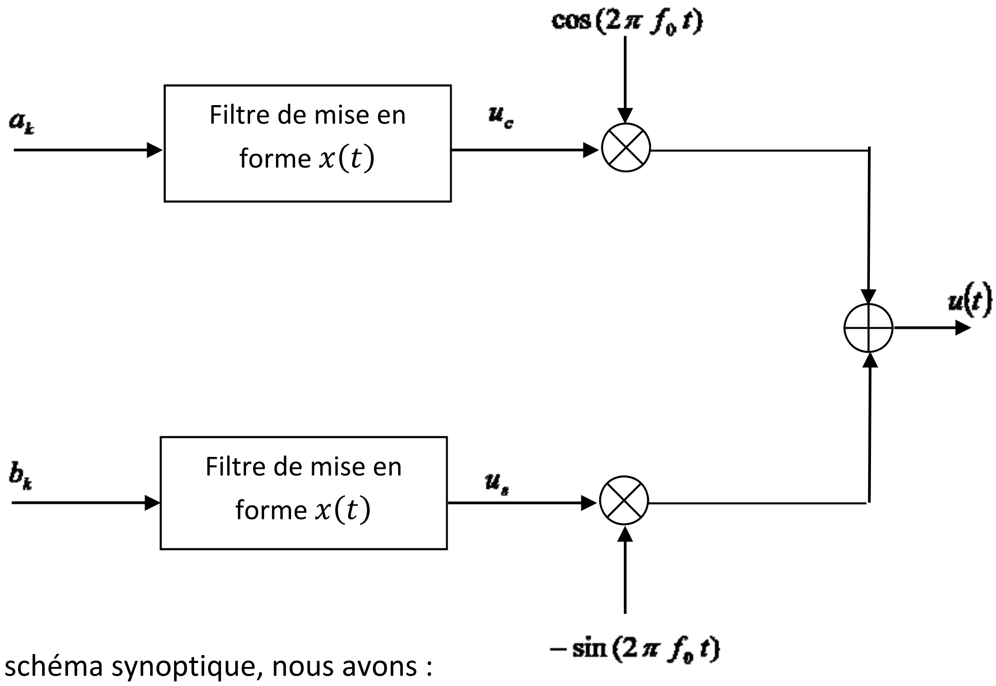
$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_k a_k\, x(t-kT)\cos(2\pi f_0 t) - \sum_k b_k\, x(t-kT)\sin(2\pi f_0 t) \\ &= \sum_k x(t-kT)\,\{a_k\cos(2\pi f_0 t) - b_k\sin(2\pi f_0 t)\} \\ &= \sum_k A_k x(t-kT)\cos(2\pi f_0 t + \Phi_k) \end{aligned}$$

avec :

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad ; \qquad \phi_k = arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

Cette écriture fait apparaitre que la modulation QAM peut être considérée comme une modulation à la fois de la phase et d'amplitude.

4.1. Modulation QAM



A partir du schéma synoptique, nous avons :

$$u_c(t) = \sum_k a_k\, x(t-kT)$$

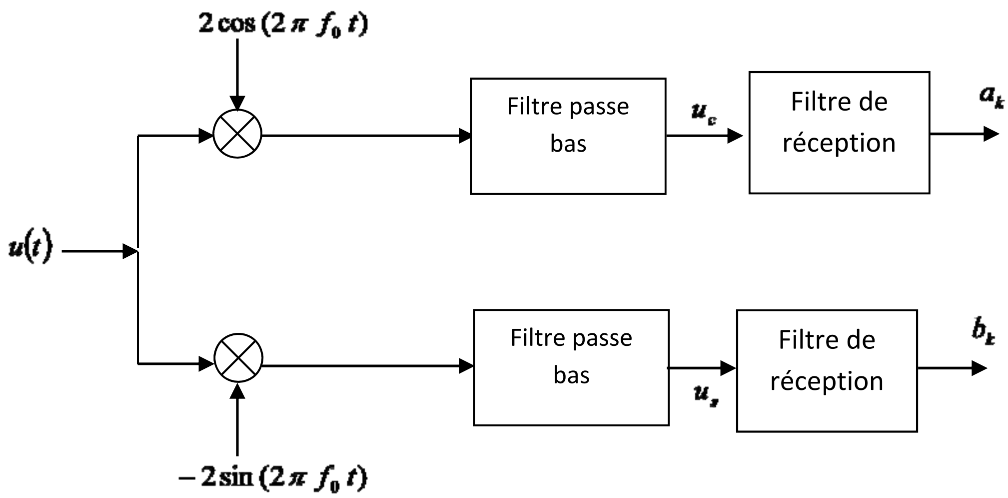
$$u_s(t) = \sum_k b_k\, x(t-kT)$$

D'autre part l'expression de $u(t)$ est la suivante :

$$u(t) = u_c(t)\cos(2\pi f_0 t) - u_s(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$\Longrightarrow u(t) = \sum_k a_k\, x(t-kT)\cos(2\pi f_0 t) - \sum_k b_k\, x(t-kT)\sin(2\pi f_0 t)$$

4.2 Démodulateur QAM



5. Modulation FSK à déplacement de fréquence

L'abréviation FSK signifie en anglais ''Frequency Shift Keying''. On a déjà modifié l'amplitude et la phase de la porteuse (ASK et PSK), cette fois ci on va modifier la fréquence fondamentale de la porteuse : on aura donc la modulation par déplacement de fréquence (FSK).

L'onde modulée est :

$$u(t) = \cos\big(2\pi\big(f_0 + m(t)\big)t\big)$$

avec

$$m(t) = \sum_k a_k\, x(t - kT)$$

On peut montrer que l'onde modulée peut s'écrire :

$$u(t) = \sum_k \cos(2\pi(f_0 + a_k)t)\, x(t - kT)$$

On change la fréquence fondamentale de la porteuse tous les T en fonction des symboles a_k : la fréquence fondamentale pour $kT \leq t \leq (k+1)T$ est $f_0 + a_k$.

Choix des symboles

Dans le cas d'une modulation FSK à M symboles, les a_k qui sont homogènes à une fréquence sont choisis de la manière suivante :

$$a_k \in \frac{\Delta f}{2}\{-(M-1), \dots, -3, -1, 1, 3, \dots, (M-1)\}$$

f_0 est donc la fréquence centrale

Δf est l'excursion de fréquence.

Modulation FSK binaire

Elle est aussi désignée par 2-FSK ($M = 2$).

On a donc deux fréquences fondamentales possibles :

$$f_1 = f_0 - \frac{\Delta f}{2}$$

$$f_2 = f_0 + \frac{\Delta f}{2}$$

On a donc

$$f_2 - f_1 = \Delta f$$

L'indice de modulation est

$$\mu = \Delta f . T$$

Exercices avec solutions

Exercice 1

La numérisation du signal de parole, préalablement limité à la bande 300-3400 Hz en téléphonie, est réalisée en échantillonnant ce signal à la fréquence de 8 KHz puis en codant les échantillons quantifiés sur *m* 8 bits. Ainsi après numérisation, le signal de parole est transformé en une source numérique.

1- Quel est le débit binaire de cette source numérique.

2- Quelle est l'opération que nous pouvons utiliser pour réduire ce débit.

Exercice 2

Soit la porteuse $p(t) = 7\cos(10\,\pi\, f_0 t + \psi_0)$ et soit le message numérique $A(t)$ ayant comme symbole c_k.

où ψ_0 est la phase de la porteuse à t=0 et nous désignons par $x(t)$ une porte de durée T, égale à 1 si $t \in [0,T[$ et 0 ailleurs.

<u>Partie I</u>

1- Donner l'expression du signal modulant.

2- Donner l'expression de l'onde modulée ASK.

3- Donner les valeurs du symbole c_k dans le cas d'une modulation par tout ou rien.

4- Donner les valeurs du symbole c_k dans le cas d'une modulation ''On Off Keying''.

<u>Parie II</u>

On considère maintenant que $\psi_0 = +\frac{\pi}{2}$.

a- Donner la nouvelle expression de l'onde modulée ASK.

b- Calculer la transformée de Fourier de l'onde modulée sachant que la transformée de Fourier de $A(t)$ est $\tilde{A}(f)$.

Exercice 3

Soit l'onde modulée donnée par l'expression suivante :

$$v(t)=\sum_k 6\cos\theta_k\ x(t-kT)\cos(2\pi f_0 t)-\sum_k 6\sin\theta_k\ x(t-kT)\sin(2\pi f_0 t)$$

où l'onde $x(t)$ représente une porte de durée T, égale à 1 si $t\in[0,T[$ et 0 ailleurs.

a- Que représente le signal $v(t)$.

b- Montrer que le signal $v(t)$ est une onde PSK.

c- Quelle est la phase qui correspond à l'intervalle de temps $[KT,(k+1)T[$

d- Dans le cas où θ_k prend les états de phase 0, π/2, π et 3 π/2, quel est le nom exacte de cette modulation.

Exercice 4

Soit l'onde modulée donnée par l'expression suivante :

$$u(t)=\sum_k 2A_k\ x(t-kT)\sin(2\pi f_0 t+\phi_k)$$

où l'onde $x(t)$ représente une porte de durée T. Elle est égale à 1 si $t\in[0,T[$ et 0 ailleurs.

a) Quelle est le type de cette modulation.
b) Montrer que l'onde $u(t)$ peut être considérée comme une superposition de deux ondes ASK à identifier. Pour chaque onde ASK, il faut donner la porteuse et le symbole.

Exercice 5

Soit l'onde modulée donnée par l'expression suivante :

$$u(t)=\sum_k \cos\phi_k\ x(t-kT)\sin(2\pi f_0 t+\psi_0)-\sum_k \sin\phi_k\ x(t-kT)\cos(2\pi f_0 t+\psi_0)$$

où l'onde $x(t)$ représente une porte de durée T, égale à 1 si $t\in[0,T[$ et 0 ailleurs. Et ψ_0 est la phase de la porteuse à t=0.

1- Montrer que le signal $u(t)$ est une onde PSK.

On considère maintenant que $\psi_0=\dfrac{3\pi}{2}$.

2- Donner la nouvelle expression de l'onde $u(t)$.

3- Donner l'expression de l'onde modulée $u(t)$ pour le cas d'un mot de deux bits égale à 10 pendant l'intervalle de temps $[T,2T[$ (il faut donner l'expression de l'onde uniquement dans l'intervalle $[T,2T[$).

Exercice 6

Soit le système montré dans la figure ci-dessous.

L'onde $v(t)$ est donné par $v(t)=\sum_k 2\ x(t-kT)\ \cos(2\pi f_0 t+\theta_k)$

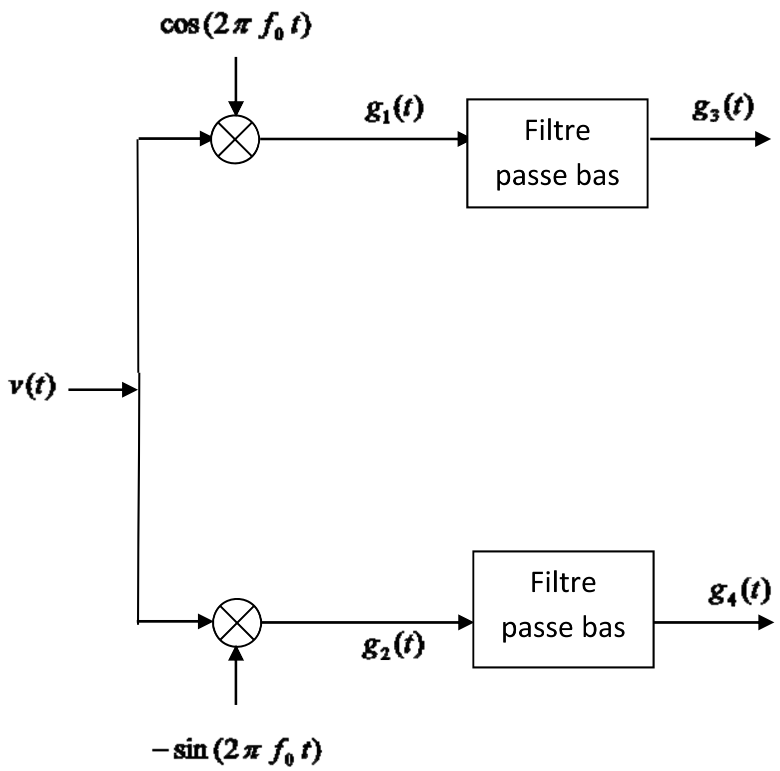
a- Montrer que $v(t)$ peut se mettre sous la forme

$v(t)=l(t)\ \cos(2\pi f_0 t)-Q(t)\sin(2\pi f_0 t)$, avec $l(t)$ et $Q(t)$ sont des signaux à identifier.

b- Déterminer les expressions de $g_1(t)$ et $g_2(t)$.

c- Donner les expressions de $g_3(t)$ et $g_4(t)$ obtenues à la sorties des filtres passe bas.

d- Que représente ce système?



Solution de l'exercice 1

La numérisation du signal de parole préalablement limité à la bande [300 Hz, 3400 Hz] en téléphonie est réalisée en échantillonnant ce signal à la fréquence 8 KHz puis en codant les échantillons quantifiés sur 8 bits.

1- Ainsi après numérisation, le signal de parole est transformé en une source numérique ayant le débit binaire :

$$D = 8 \text{ x } 10^3 \text{ x } 8 = 64000 \text{ bit/s}$$

2- Nous pouvons réduire ce débit en faisant un codage de source bien approprié.

Solution de l'exercice 2

Partie I

1- L'expression du signal modulant est $A(t) = \sum_k c_k \, x(t - kT)$

2- L'expression de l'onde modulée ASK est

$$u(t) = A(t) \cdot p(t) = 7 \sum_k c_k \, x(t - kT) \cos(10 \pi f_0 t + \psi_0)$$

3- Les valeurs du symbole c_k dans le cas d'une modulation par tout ou rien sont :

$c_k \in \{0,1\}$

Le symbole $c_k = 0$ correspond au bit 0 (extinction de la porteuse)

Et le symbole $c_k = 1$ correspond au bit 1

4- La modulation ''On Off Keying'' est la même chose que la modulation par tout ou rien, donc la réponse est la même que celle de la question 3.

Parie II

a- La nouvelle expression de l'onde modulée ASK est :

$$u(t) = 7 \sum_k c_k \, x(t - kT) \cos(10 \pi f_0 t + \frac{\pi}{2}) = -7 \sum_k c_k \, x(t - kT) \sin(10 \pi f_0 t)$$

b- Calcul de la transformée de Fourier de l'onde modulée

$$\sin(10 \pi f_0 t) = \frac{e^{j10 \pi f_0 t} - e^{-j10 \pi f_0 t}}{2j}$$

$$\tilde{u}(f) = TF\{-7 A(t) \sin(10 \pi f_0 t)\}$$

En utilisant la propriété de décalage fréquentiel, nous trouvons :

$$\tilde{u}(f) = \frac{7}{2} j\left\{\tilde{A}(f - 5f_0) - \tilde{A}(f + 5f_0)\right\}$$

Solution de l'exercice 3

a- Le signal $v(t)$ est une combinaison de deux modulations ASK en quadrature.

b- $v(t) = \sum_k 6\cos\theta_k \; x(t - kT)\cos(2\pi f_0 t) - \sum_k 6\sin\theta_k \; x(t - kT)\sin(2\pi f_0 t)$

$$= \sum_k 6x(t - kT)\left[\cos\theta_k \cos(2\pi f_0 t) - \sin\theta_k \; x(t - kT)\right]$$

$$= \sum_k 6x(t - kT)\cos\left(2\pi f_0 t + \theta_k\right)$$

Cette dernière est l'expression d'une onde PSK.

c- La phase qui correspond à l'intervalle de temps $\left[KT, (k+1)T\right[$ est θ_k .

d- Dans le cas où θ_k prend les états de phase 0, π/2, π et 3 π/2, le nom exact de cette modulation est 4-PSK.

Solution de l'exercice 4

a) Cette modulation est à la fois ASK et PSK

b) On montre que l'onde $u(t)$ peut être considérée comme une superposition de deux ondes ASK

$$u(t) = \sum_k 2A_k \; x(t - kT)\sin(2\pi f_0 t + \phi_k)$$

$$= \sum_k 2A_k \; x(t - kT)\left\{\sin(2\pi f_0 t)\cos(\phi_k) + \cos(2\pi f_0 t)\sin(\phi_k)\right\}$$

<u>Première onde ASK</u>

Porteuse : $\sin(2\pi f_0 t)$

Symbole : $2A_k \cos(\phi_k)$

<u>Deuxième onde ASK</u>

Porteuse : $\cos(2\pi f_0 t)$

Symbole : $2A_k \sin(\phi_k)$

Solution de l'exercice 6

a- L'expression de $v(t)$ est donnée par :

$$v(t)=\sum_k 2\ x(t-kT)\ \cos(2\pi f_0 t+\theta_k)$$

Cette expression peut s'écrire sous la forme :

$$v(t)=\sum_k 2\,x(t-kT)\left\{\cos(2\pi f_0 t)\cos\left(\theta_k\right)-\sin(2\pi f_0 t)\sin\left(\theta_k\right)\right\}$$

Par comparaison avec l'expression :

$$v(t)=l(t)\cos(2\pi f_0 t)-Q(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

On déduit que :

$$l(t)=\sum_k 2\cos(\theta_k)\,x(t-kT)$$

$$Q(t)=\sum_k\ 2\sin(\theta_k)\,x(t-kT)$$

Donc $v(t)$ une combinaison linéaire de deux modulations ASK en quadrature. Le signal $l(t)$ modulant la porteuse $\cos(2\pi f_0 t)$ et le signal $Q(t)$ modulant la porteuse en quadrature (déphasée de $\frac{\pi}{2}$).

b- A partir du schéma synoptique de la figure ci-dessus, l'expression de $g_1(t)$ se calcule de la manière suivante :

$$g_1(t)=v(t)\cos(2\pi f_0 t)=\{l(t)\cos(2\pi f_0 t)-Q(t)\sin(2\pi f_0 t)\}\cos(2\pi f_0 t)$$

Donc :

$$\begin{aligned}g_1(t)&=l(t)\cos^2(2\pi f_0 t)-Q(t)\sin(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 t)\\&=l(t)\left\{\frac{1+\cos(4\pi f_0 t)}{2}\right\}-\frac{1}{2}Q(t)\sin(4\pi f_0 t)\\&=\frac{1}{2}l(t)+\frac{1}{2}l(t)\cos(4\pi f_0 t)-\frac{1}{2}Q(t)\sin(4\pi f_0 t)\end{aligned}$$

En outre l'expression de $g_2(t)$ se calcule de la manière suivante :

$$g_2(t)=-v(t)\sin(2\pi f_0 t)=-\{l(t)\cos(2\pi f_0 t)-Q(t)\sin(2\pi f_0 t)\}\sin(2\pi f_0 t)$$

Donc

$$\begin{aligned}g_2(t)&=-v(t)\sin(2\pi f_0 t)\\&=-l(t)\cos(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 t)+Q(t)\sin^2(2\pi f_0 t)\\&=-\frac{1}{2}l(t)\sin(4\pi f_0 t)+Q(t)\left\{\frac{1-\cos(4\pi f_0 t)}{2}\right\}\\&=\frac{1}{2}Q(t)-\frac{1}{2}l(t)\sin(4\pi f_0 t)-\frac{1}{2}Q(t)\cos(4\pi f_0 t)\end{aligned}$$

c- Les expressions de $g_3(t)$ et $g_4(t)$ obtenues à la sorties des filtres passe bas sont :

$$g_3(t) = \frac{1}{2} I(t)$$

$$g_4(t) = \frac{1}{2} Q(t)$$

Et puisque nous avons

$$I(t) = \sum_k 2\cos(\theta_k)\, x(t - kT)$$

$$Q(t) = \sum_k 2\sin(\theta_k)\, x(t - kT)$$

Les expressions finales de $g_3(t)$ et $g_4(t)$ sont :

$$g_3(t) = \sum_k \cos(\theta_k)\, x(t - kT)$$

$$g_4(t) = \sum_k \sin(\theta_k)\, x(t - kT)$$

d- Ce système représente un démodulateur PSK.