Communication

Analogique

Chapitre I : Notions de base en radiofréquence

1. Chaine de transmission analogique

Le but d'une chaine de transmission analogique est la transmission de l'information d'une source localisée en un point de l'espace vers une autre destination localisée en un autre point de l'espace.

Le message produit par la source n'est pas de nature électrique, pour cette raison on utilise un transducteur d'entrée et dont le rôle est de convertir le message produit par la source en un signal électrique variant dans le temps.

Exemple

Le microphone est un transducteur d'entrée, il convertit la parole en des variations de tension.

Le transducteur de sortie fait le rôle inverse (haut-parleur).

Généralement quand on parle d'une chaine de transmission analogique on sous-entend les parties : émetteur, canal de communication et récepteur (voir Figure ci-dessous).

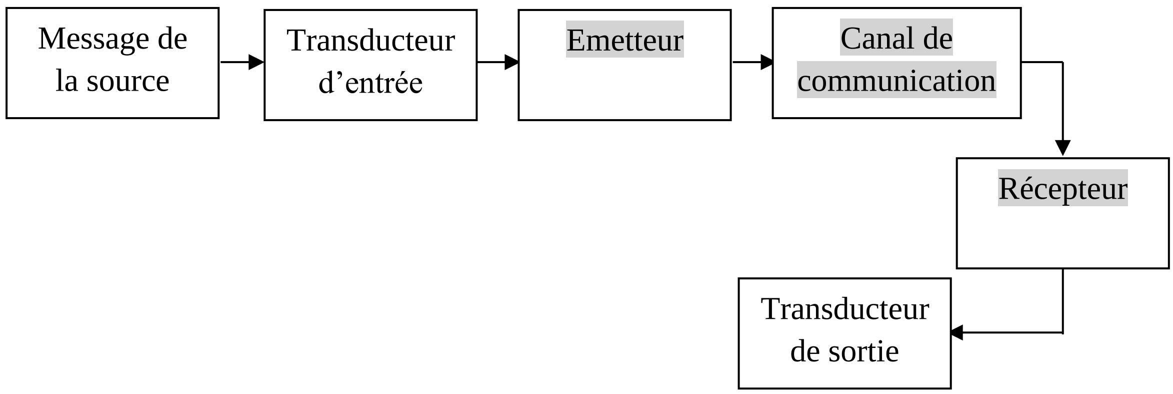


Figure 1. Chaine de transmission analogique

1.1. Emetteur

La fonction principale d'un émetteur est de modifier le message en une forme appropriée pour la transmission à travers le canal. Cette modification est achevée par un processus connue sous le nom de modulation.

Les raisons pour lesquelles on utilise l'opération de modulation sont principalement :

- Rendre facile la propagation ou le rayonnement

- Réduire les interférences
- Possibilité de multiplexage

En outre de la modulation, d'autres fonctions (telles que le filtrage et l'amplification) sont assurées par l'émetteur.

1.2. Récepteur

La fonction principale d'un récepteur est extraire le message à partir du signal reçu (envoyé par l'émetteur). En radiocommunication une des fonctions que le récepteur doit effectuer est l'amplification du signal reçu.

Le processus qui consiste à extraire le message du signal reçu est l'opération inverse de la modulation appelée démodulation.

1.3. Canal de communication

Le canal de communication ou de transmission peut avoir plusieurs formes. La forme la plus populaire est le canal qui existe entre l'antenne d'une station radio et l'antenne de réception. Dans ce cas le signal transmis se propage à travers l'atmosphère.

On peut également trouver l'émetteur et le récepteur reliés par câble (système téléphonique local, fibre optique…).

2. Longueur d'onde et puissance

Une onde est une perturbation qui se propage dans un milieu sans modifier de façon permanente ses propriétés. Une onde monochromatique est une onde ayant une seule fréquence (fréquence bien définie).

La longueur d'onde est une grandeur physique homogène à une longueur, caractéristique d'une onde monochromatique dans un milieu homogène, définie comme la distance séparant deux points qui sont au même état. On peut prendre comme exemple deux maximas consécutifs de l'amplitude. On note souvent la longueur d'onde par la lettre grecque λ (lambda). Si l'onde décrit une fonction périodique quelconque, on peut définir la longueur d'onde comme le plus petit $\lambda > 0$ tel que pour tout x, nous avons :

$$f(x+\lambda) = f(x)$$

Notons que la longueur d'onde dépend de la vitesse à laquelle l'onde se propage dans le milieu. Ainsi, lorsqu'une onde passe d'un milieu à un autre en changeant de vitesse, sa fréquence reste inchangée, mais sa longueur d'onde varie.

La longueur d’onde est l’équivalent spatial de la période temporelle (périodicité spatiale des oscillations). En effet, la longueur d’onde est la distance parcourue par l’onde au cours d’une période. Si on appelle v la vitesse (célérité) de l’onde et T sa période temporelle et f sa fréquence, on a :

$$\lambda = v\,T = \frac{v}{f}$$

Rappelons également que plus la longueur d'onde d'une onde électromagnétique est courte, plus l'énergie qu'elle transporte est grande. Les rayons X par exemple présentent une longueur d'onde comprise entre 10^{-11} et 10^{-8} mètres. Ils transportent ainsi plus d'énergie que les micro-ondes dont la longueur d'onde se situe entre 3 millimètres et 30 centimètres.

3. Bandes de fréquences

Une bande de fréquences définit une plage de fréquences qui ont des propriétés similaires. Chaque plage ainsi définie représente un spectre de fréquences. Chaque bande peut à son tour être découpée en sous-bandes.

Le domaine des radiocommunications est réglementé par l'Union internationale des télécommunications (UIT) qui a établi un règlement des radiocommunications dans lequel on peut lire la définition suivante :

Une onde radioélectrique ou onde hertzienne sont des ondes électromagnétiques dont la fréquence est par convention inférieure à 300 GHz, peuvent se propager dans l'espace sans guide artificiel. Elles sont comprises entre 9 kHz et 300 GHz qui correspondent à des longueurs d'onde de 33 km à 1 mm.

Les ondes de fréquence inférieure à 9 kHz sont des ondes radio, mais ne sont pas réglementées.

Les ondes de fréquence supérieure à 300 GHz sont classées dans les ondes infrarouges car la technologie associée à leur utilisation est actuellement de type optique et non électrique, cependant cette frontière est artificielle car il n'y a pas de différence de nature entre les ondes radio et les autres ondes électromagnétiques.

3.1. Spectre radiofréquence

Une onde radio est classée en fonction de sa fréquence exprimée en Hz ou cycles par seconde ; l'ensemble de ces fréquences constitue le spectre radiofréquence. Le spectre est divisé conventionnellement en bandes d'une décade, dont les appellations internationales sont normalisées. Les appellations francophones équivalentes sont parfois également utilisées dans les textes français (voir Tableau 1).

3.2. Les microondes

Le terme microondes se réfère aux signaux avec des fréquences entre 300 MHz et 300 GHz. La période $T = \frac{1}{f}$ d'un signal microonde varie donc de 3 ns à 3 ps, respectivement, et la longueur d'onde correspondante $\lambda = \frac{c}{f}$ varie de 1 m à 1 mm, respectivement, où $c = 3 \text{ x } 10^8 \text{ m/s}$ est la vitesse de la lumière dans le vide. Les signaux avec des longueurs d'ondes de l'ordre des millimètres sont appelés ondes millimétriques. L'appellation micro-ondes provient du fait que ces ondes ont une longueur d'onde plus courte que celles de la bande VHF, utilisée par les radars pendant la Seconde Guerre mondiale. Le terme micro-ondes est connu aussi sous le nom d'hyperfréquences. La gamme hyperfréquence est découpée en différentes bandes, en fonction des différentes applications techniques (voir Tableau 2).

4. Echelle des décibels

Soit A_1 et A_2 deux valeurs d'une grandeur de tension ; avec $A_1 = 10 \text{ v}$ et $A_2 = 20 \text{ v}$. Si on compare les deux tensions, on peut dire que la tension A_2 est deux fois plus grand que la tension A_1. Cette comparaison est correcte et utile dans de nombreux cas. Cependant, Comme nous manipulons souvent des grandeurs d'ordre faible, il est plus commode d'utiliser une échelle logarithmique.

Par définition le rapport de deux gradeurs en dB est :

$$R_{\text{dB}} = 20 \, \log_{10} \frac{A_2}{A_1}$$

Ainsi par exemple le signal A_2 qui est le double du signal A_1 est supérieur de plus 6 dB pour le cas d'une échelle logarithmique puisque :

Tableau 1. Spectre radiofréquence.

Désignation internationale	Désignation francophone	Fréquence	Longueur d'onde	Autres appellations	Exemples d'utilisation
ELF (*extremely low frequency*)	EBF (extrêmement basse fréquence)	3 Hz à 30 Hz	100 000 km à 10 000 km		Détection de phénomènes naturels
SLF (*super low frequency*)	SBF (super basse fréquence)	30 Hz à 300 Hz	10 000 km à 1 000 km		Communication avec les sous-marins
ULF (*ultra low frequency*)	UBF (ultra basse fréquence)	300 Hz à 3 000 Hz	1 000 km à 100 km		Détection de phénomènes naturels
VLF (*very low frequency*)	TBF (très basse fréquence)	3 kHz à 30 kHz	100 km à 10 km	ondes myriamétriques	Communication avec les sous-marins, Implants médicaux, Recherches scientifiques…
LF (*low frequency*)	BF (basse fréquence)	30 kHz à 300 kHz	10 km à 1 km	grandes ondes ou ondes longues ou kilométriques	Radioamateur, Radionavigation, Radiodiffusion GO, Radio-identification
MF (*medium frequency*)	MF (moyenne fréquence)	300 kHz à 3 MHz	1 km à 100 m	petites ondes ou ondes moyennes ou hectométriques	Radioamateur, Radiodiffusion PO, Service maritime, Appareil de recherche de victimes d'avalanche
HF (*high frequency*)	HF (haute fréquence)	3 MHz à 30 MHz	100 m à 10 m	ondes courtes ou décamétriques	Organisations diverses, Militaire, Radiodiffusion OC, Maritime, Aéronautique, Radioamateur, Météo, Radio de catastrophe, etc.

VHF (*very high frequency*)	THF (très haute fréquence)	30 MHz à 300 MHz	10 m à 1 m	ondes ultra-courtes ou métriques	Radiodiffusion FM, Radiodiffusion RNT, Aéronautique, Maritime, Radioamateur, Gendarmerie nationale française, Pompiers, SAMU, Réseaux privés, taxis, militaire, Météo, etc.
UHF (*ultra high frequency*)	UHF (ultra haute fréquence)	300 MHz à 3 GHz	1 m à 10 cm	ondes décimétriques	Réseaux privés, militaire, GSM, GPS, téléphones sans fil (DECT), Téléphonie mobile, Wi-Fi, Télévision, Radioamateur, etc.
SHF (*super high frequency*)	SHF (super haute fréquence)	3 GHz à 30 GHz	10 cm à 1 cm	ondes centimétriques	Réseaux privés, Wi-Fi, Téléphonie mobile, Micro-onde, Radiodiffusion par satellite (TV), Faisceau hertzien, Radar météorologique, Radioamateur, etc.
EHF (*extremely high frequency*)	EHF (extrêmement haute fréquence)	30 GHz à 300 GHz	1 cm à 1 mm	ondes millimétriques	Réseaux privés, Téléphonie mobile, Radars anticollision pour automobiles, Liaisons vidéo transportables, Faisceau hertzien, Radioamateur, etc.
Terahertz	Térahertz	300 GHz à 3 000 GHz	1 mm à 100 µm	ondes submillimétriques	scanner corporel

Tableau 2. Bandes de fréquence microondes.

Désignation	**Gamme de fréquence**	**Gamme de longueur d'onde**
Bande L	1 à 2 GHz	30 à 15 cm
Bande S	2 à 4 GHz	15 à 7,5 cm
Bande C	4 à 8 GHz	7,5 à 3,75 cm
Bande X	8 à 12 GHz	3,75 à 2,5 cm
Bande Ku	12 à 18 GHz	2,5 à 1,6 cm
Bande K	18 à 26,5 GHz	16,6 à 11,3 mm
Bande Ka	26,5 à 40 GHz	11,3 à 7,5 mm
Bande Q	33 à 50 GHz	9,1 à 6 mm
Bande U	40 à 60 GHz	7,5 à 5 mm
Bande V	50 à 75 GHz	6 à 4 mm
Bande E	50 à 90 GHz	6 à 3,3 mm
Bande W	75 à 110 GHz	4 à 2,7 mm
Bande D	110 à 170 GHz	2,7 à 1,8 mm

$$R_{\mathrm{dB}} = 20\ \log_{10}\frac{A_2}{A_1} = 20\ \log_{10}\frac{20}{10} = 20\ \log_{10} 2 = 6.02\ \mathrm{dB}$$

Dans le cas de deux valeurs P_1 et P_2 d'une grandeur de puissance, le rapport de ces deux gradeurs en dB est :

$$R_{\mathrm{dB}} = 10\ \log_{10}\frac{P_2}{P_1}$$

Si $P_2 = 100\ P_1$, le rapport entre les deux puissances est de 100, ce qui correspond à 20 dB.

Si $P_2 = 2P_1$, leur rapport est de 2, ce qui correspond à 3 dB. Ainsi, multiplier par 2 une puissance correspond à ajouter 3 dB.

Chapitre II : La modulation et démodulation d'amplitude

1. Définition et nécessité de la modulation

Le message en communication peut prendre divers formes : voie humaine ou musique, photographie ou film, séquences de lettres ou de chiffres. Notre but sera d'envoyer ce message à distance.

Le transducteur traduit le message sous forme électrique. Ainsi, un microphone convertit les variations de pression acoustique en courant électrique proportionnel. Le message électrique comprendra des fréquences allant de 20 Hz à 20 KHz.

Supposons que nous désirons émettre le message électrique amplifié au moyen d'une antenne. Les dimensions des antennes propres à ces fréquences atteindraient 1500 Km pour 100 Hz et 15 Km pour 10 KHz ! Ceci revient à dire que les possibilités de rayonnement sont extrêmement réduites. De plus, Si deux stations émettent en même temps en fréquence audio, il ne serait pas possible de discerner l'une de l'autre dans le récepteur et on ne pourrait pas donc transmettre plus d'un message à la fois.

Nous devons donc recourir à un autre moyen : Introduire le message électrique basse fréquence dans un autre signal haute fréquence (onde porteuse). C'est le principe de base de la modulation. Le signal résultant, appelé onde modulée, est maintenant haute fréquence et peut être facilement transmis.

Pour pouvoir transmettre plus d'un message à la fois, chaque station choisie une autre fréquence qui lui est propre dite fréquence de la porteuse.

En modulation analogique, un des paramètres de l'onde modulée varie proportionnellement au message de façon à ce qu'il existe une correspondance entre le paramètre et le message.

L'onde porteuse est de la forme :

$$p(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \phi_0)$$

A_0 et f_0 sont, respectivement, l'amplitude et la fréquence de la porteuse. ϕ_0 étant la phase initiale de la porteuse.

L'onde modulée prend l'expression généralisée suivante :

$$v(t) = A(t) \cos\big(2\pi f_0 t + \phi(t)\big)$$

$A(t)$ et $\phi(t)$ sont les deux paramètres qui peuvent être variés :

Lorsque $A(t)$ est linéairement lié au message (signal modulant), il en résulte la modulation d'amplitude ($\phi(t)$ dans ce cas est une constante).

Lorsque $\phi(t)$ ou $\frac{d\phi(t)}{dt}$ est linéairement lié au signal modulant, il en résulte la modulation de phase ou la modulation de fréquence, respectivement ($A(t)$ dans ce cas est une constante).

2. Modulation d'amplitude sans porteuse

La modulation d'amplitude (sans ou avec porteuse) est définie comme étant un processus dans lequel l'amplitude de l'onde modulée varie proportionnellement au message $m(t)$.

Le premier type de modulation d'amplitude qu'on va étudier est la modulation d'amplitude sans porteuse, connue également sous le nom de ''Modulation à **D**ouble **B**ande **L**atérale **P**orteuse **S**upprimée (DBLPS)''. L'appellation correspondante dans la terminologie anglophone est ''**D**ouble-Sideband Suppressed-Carrier modulation (DSBSC)''.

Soit le message $m(t)$ qu'on veut transmettre. Ce message est basse fréquence, d'où la nécessité de faire l'opération de modulation.

La porteuse $p(t)$ est de la forme :

$$p(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t)$$

Dans l'expression ci-dessus, nous avons supposé que la phase initiale de la porteuse est nulle. Aussi, il est important de noter que la fréquence de la porteuse (f_0) doit être suffisamment grande (porteuse haute fréquence).

L'onde modulée est donnée par l'expression suivante :

$$v(t) = A_0\, m(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

On considère que le spectre du message $m(t)$ est celui représenté dans la figure ci-dessous.

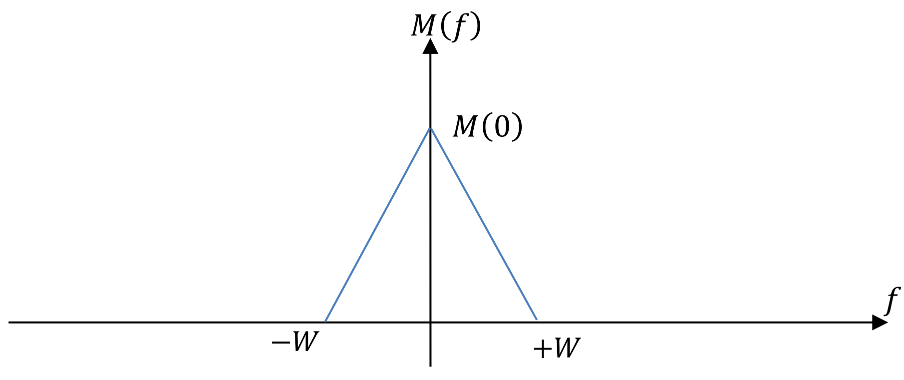


Figure 1. Spectre du message $m(t)$.

Pour tracer le spectre de l'onde modulée $v(t)$, il faut calculer la transformée de Fourier du signal $v(t)$. Donc, on va tout d'abord présenter un petit rappel sur la transformée de Fourier.

2.1. Rappelle sur la transformée de Fourier

La transformée de Fourier de la fonction $g(t)$ est une autre fonction $G(f)$ ayant comme variable la fréquence f tel que :

$$\mathrm{TF}\{g(t)\} = G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

La transformée de Fourier inverse est défini comme suit :

$$\mathrm{TF}^{-1}\{G(f)\} = g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f)\, e^{+j2\pi f t}\, df$$

Dans ce cours, nous avons besoin de deux propriétés, à savoir :

Linéarité

Si

$\mathrm{TF}\{g_1(t)\} = G_1(f)$

$\mathrm{TF}\{g_2(t)\} = G_2(f)$

$\Longrightarrow \mathrm{TF}\{a g_1(t) + b g_2(t)\} = a G_1(f) + b G_2(f)$

a et b sont des constantes

Décalage fréquentiel

Si

$\mathrm{TF}\{g(t)\} = G(f)$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \mathrm{TF}\left\{e^{+j2\pi f_0 t} g(t)\right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+j2\pi f_0 t}\, g(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-j2\pi (f - f_0) t}\, dt \\ &= G(f - f_0)\end{aligned}$$

Donc, la multiplication d'une fonction $g(t)$ par un facteur $e^{+j2\pi f_0 t}$ est équivalent à décaler sa transformée de Fourier $G(f)$ dans la direction positive par la quantité f_0.

De la même manière, on peut montrer que :

$\mathrm{TF}\left\{e^{-j2\pi f_0 t} g(t)\right\} = G(f + f_0)$

2.2. Spectre de l'onde modulée (DBLPS)

Pour tracer le spectre de l'onde modulée $v(t)$, on va tout d'abord calculer la transformée de Fourier du signal $v(t)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{TF}\{v(t)\} &= \mathrm{TF}\{A_0\, m(t)\cos(2\pi f_0 t)\}\\ &= \mathrm{TF}\left\{A_0\, m(t)\frac{e^{j2\pi f_0 t}+e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right\}\\ &= \mathrm{TF}\left\{\frac{A_0}{2} m(t)e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A_0}{2} m(t)e^{-j2\pi f_0 t}\right\}\end{aligned}$$

En utilisant la propriété de la linéarité, on trouve

$$\mathrm{TF}\{v(t)\} = \frac{A_0}{2}\mathrm{TF}\{\, m(t)e^{j2\pi f_0 t}\} + \frac{A_0}{2}\mathrm{TF}\{\, m(t)e^{-j2\pi f_0 t}\}$$

En utilisant la propriété de décalage fréquentiel, on obtient

$$\mathrm{TF}\{v(t)\} = V(f) = \frac{A_0}{2}\{M(f-f_0) + M(f+f_0)\}$$

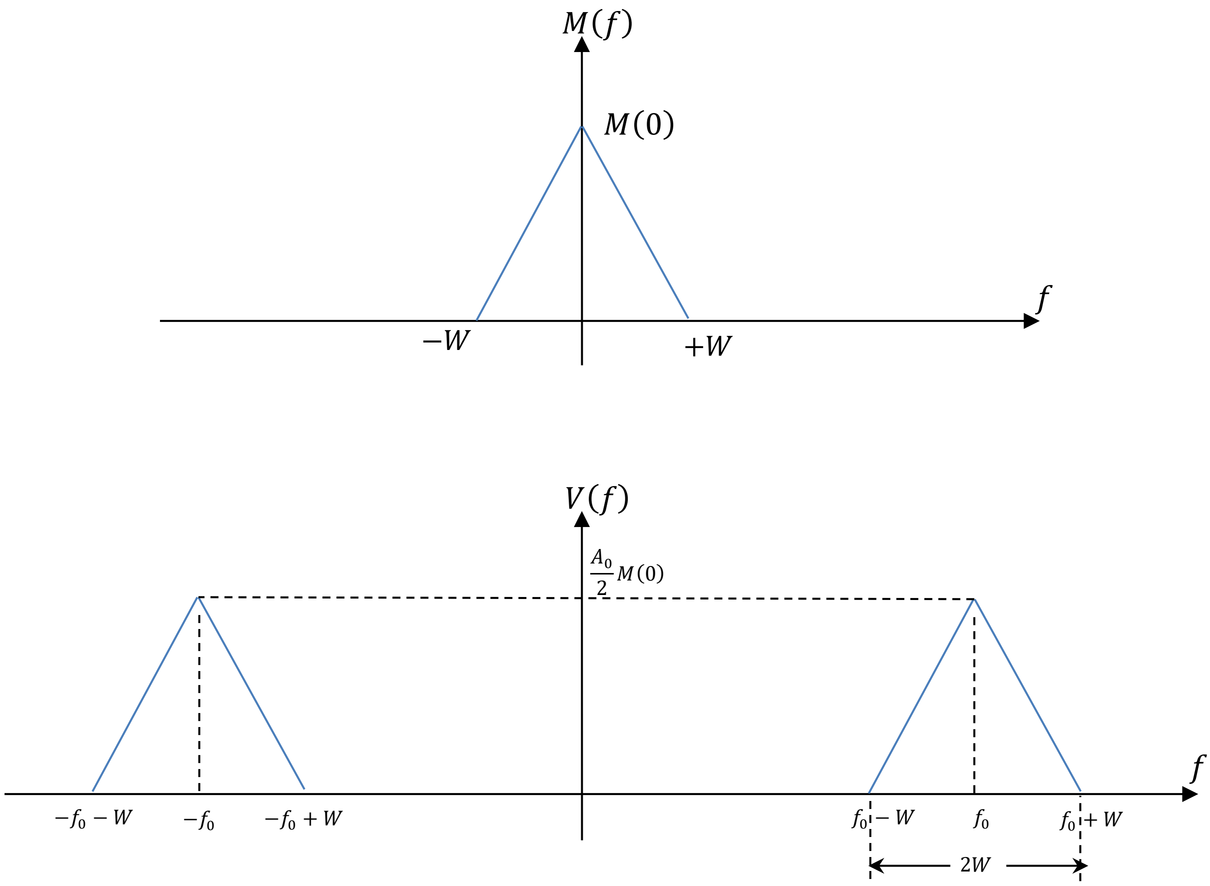


Figure 2. Spectre de l'onde modulée (DBLPS).

Il est claire à partir de la figure 2 qu'après modulation, la transmission nécessite une largeur de bande égale à $2W$. Nous avons deux bande latérales, chacune ayant une largeur W, d'où l'appellation double bande latérale.

En ce qui concerne la qualification de cette modulation par sans porteuse, nous allons comprendre cette qualification lorsque nous étudions la modulation d'amplitude avec porteuse.

2.3. Génération des ondes DBLPS

Le rôle d'un **modulateur** est la génération de l'onde modulée. Donc, le modulateur modifie le message en une forme appropriée pour la transmission. Le message après modification est appelée onde modulée. L'entrée du modulateur est le message alors qu'au niveau de sa sortie on retrouve l'onde modulée.

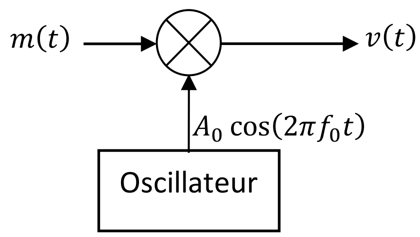


Figure 3. Modulateur DBLPS.

A la sortie du système montré dans la Figure 3, nous avons :

$$v(t) = m(t) \times A_0 \cos(2\pi f_0 t) = A_0\, m(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

Cette dernière expression étant l'onde modulée (modulation d'amplitude sans porteuse ou DBLPS).

2.4. Détection cohérente des ondes DBLPS

Le rôle d'un **démodulateur** est la récupération du message à bande de base à partir de l'onde modulée. Donc, l'entrée du démodulateur est l'onde modulée alors qu'au niveau de sa sortie on retrouve le message.

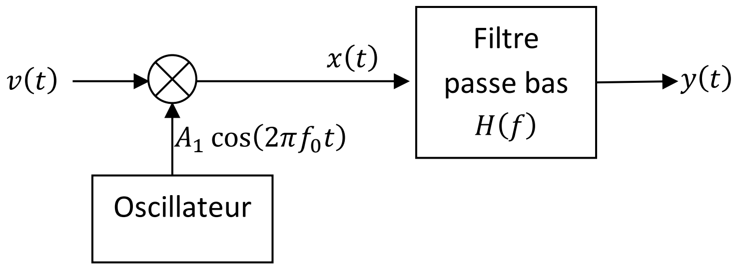


Figure 4. Démodulateur DBLPS.

A l'entrée du démodulateur, nous avons :

$v(t) = A_0\, m(t) \cos(2\pi f_0 t)$

$$x(t) = v(t) \times A_1\ \cos(2\pi f_0 t) = A_0\, m(t) \cos(2\pi f_0 t) \times A_1\ \cos(2\pi f_0 t)$$

$$= A_0\, A_1 m(t)[\cos(2\pi f_0 t)]^2$$

$$= A_0\, A_1 m(t) \cos^2(2\pi f_0 t)$$

En utilisant la propriété trigonométrique

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

L'expression de $x(t)$ devient :

$$x(t) = A_0\, A_1 m(t) \frac{1+\cos(4\pi f_0 t)}{2} = \frac{A_0\, A_1}{2} m(t) + \frac{A_0\, A_1}{2} m(t) \cos(4\pi f_0 t)$$

Pour tracer le spectre du signal $x(t)$, il faut tout d'abord calculer la transformée de Fourier de ce signal.

$$\mathrm{TF}\{x(t)\} = \mathrm{TF}\left\{\frac{A_0\, A_1}{2} m(t) + \frac{A_0\, A_1}{2} m(t) \cos(4\pi f_0 t)\right\}$$

$$= \mathrm{TF}\left\{\frac{A_0\, A_1}{2} m(t) + \frac{A_0\, A_1}{2} m(t) \frac{e^{j2\pi(2f_0)t} + e^{-j2\pi(2f_0)t}}{2}\right\}$$

En utilisant la propriété de la linéarité, on trouve

$$\mathrm{TF}\{x(t)\} = \frac{A_0\, A_1}{2} \mathrm{TF}\{m(t)\} + \frac{A_0\, A_1}{4} \mathrm{TF}\{m(t) e^{j2\pi(2f_0)t}\} + \frac{A_0\, A_1}{4} \mathrm{TF}\{m(t) e^{-j2\pi(2f_0)t}\}$$

En utilisant la propriété de décalage fréquentiel, nous obtenons

$$\mathrm{TF}\{x(t)\} = X(f) = \frac{A_0\, A_1}{2} M(f) + \frac{A_0\, A_1}{4} M(f-2f_0) + \frac{A_0\, A_1}{4} M(f+2f_0)$$

Le spectre du signal $x(t)$ est représenté dans la figure ci-dessous :

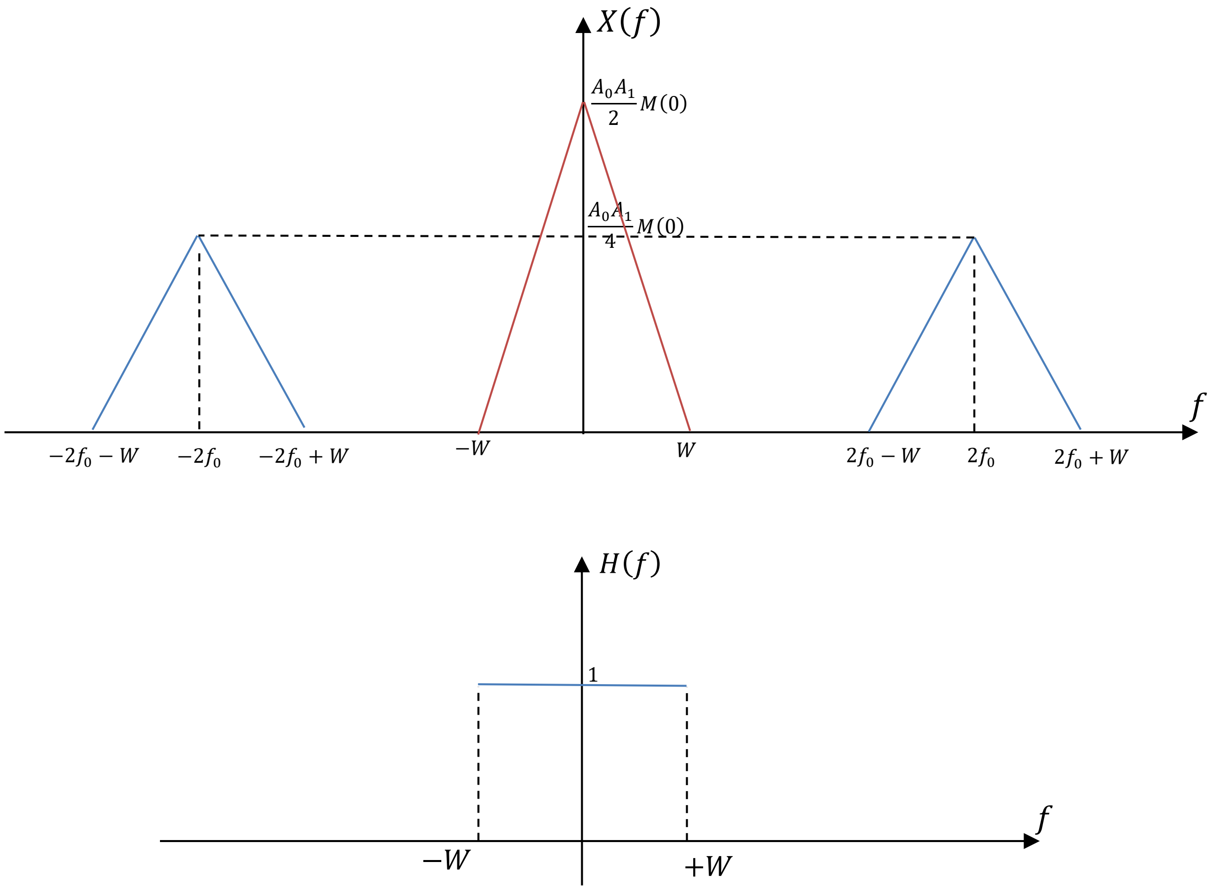


Figure 5. Spectre du signal $x(t)$.

IL est claire à partir de la figure 5 que le filtre passe bas élimine les hautes fréquences et fait passer uniquement les fréquences basses situées entre $[-W, +W]$ (il fait passer uniquement le signal en rouge dans la figure 5). Donc, après filtrage passe bas, nous obtenons

$$y(t) = \frac{A_0\, A_1}{2} m(t)$$

Notons que ce type de démodulation est connu sous le nom de démodulation cohérente ou synchrone.

3. Modulation d’amplitude avec porteuse ou modulation AM

Le deuxième type de modulation d’amplitude qu’on va étudier est la modulation d’amplitude avec porteuse, connue également sous le nom de ‘‘Modulation AM’’.

Soit le message $m(t)$ qu’on veut transmettre. Ce message est basse fréquence, d’où la nécessité de faire l’opération de modulation. La porteuse $p(t)$ est de la forme :

$$p(t) = \grave{A}_0 \cos(2\pi f_0 t)$$

Dans l’expression ci-dessus, nous avons supposé que la phase initiale de la porteuse est nulle. Aussi, il est important de noter que la fréquence de la porteuse (f_0) doit être suffisamment grande (porteuse haute fréquence).

L’onde modulée AM peut être décrite par une fonction ayant l’expression temporelle suivante :

$$v(t) = \grave{A}_0\,[A + m(t)] \cos(2\pi f_0 t)$$

Dans l’expression ci-dessus, A est une composante continue positive. Le but d’ajouter la constante A au message est d’avoir $A + m(t) > 0$. L’enveloppe de l’onde modulée est

$$E(t) = \grave{A}_0\,[A + m(t)]$$

Donc, le but d’ajouter la constante A au message est d’avoir une enveloppe positive.

$$v(t) = \grave{A}_0\,[A + m(t)] \cos(2\pi f_0 t) = A\,\grave{A}_0 \left[1 + \frac{m(t)}{A}\right] \cos(2\pi f_0 t)$$

On pose $\frac{1}{A} = k$ et $A\,\grave{A}_0 = A_0$

Donc $v(t)$ peut s’écrire de la manière suivante

$v(t) = A_0\,[1 + k\,m(t)] \cos(2\pi f_0 t)$

L’expression ci-dessus en rouge est l’expression de l’onde modulée AM.

On peut également écrire l’onde modulée AM de la manière suivante :

$$v(t) = A_0 \left[1 + k\,\frac{|min(m(t))|}{|min(m(t))|} m(t)\right] \cos(2\pi f_0 t)$$

Posant $k\,|min(m(t))| = a$ et $\frac{m(t)}{|min(m(t))|} = m_n(t)$, on trouve

$v(t) = A_0\,[1 + a\,m_n(t)] \cos(2\pi f_0 t)$

Cette dernière expression représente également l’expression de l’onde modulée AM. a dans cette expression représente l’indice de modulation.

Pour que l’enveloppe peut être visualisée d’une manière correcte. C’est-à-dire, pour qu’il n’y aura pas de distorsion d’enveloppe, il faut que $a < 1$ (voir Figure 6).

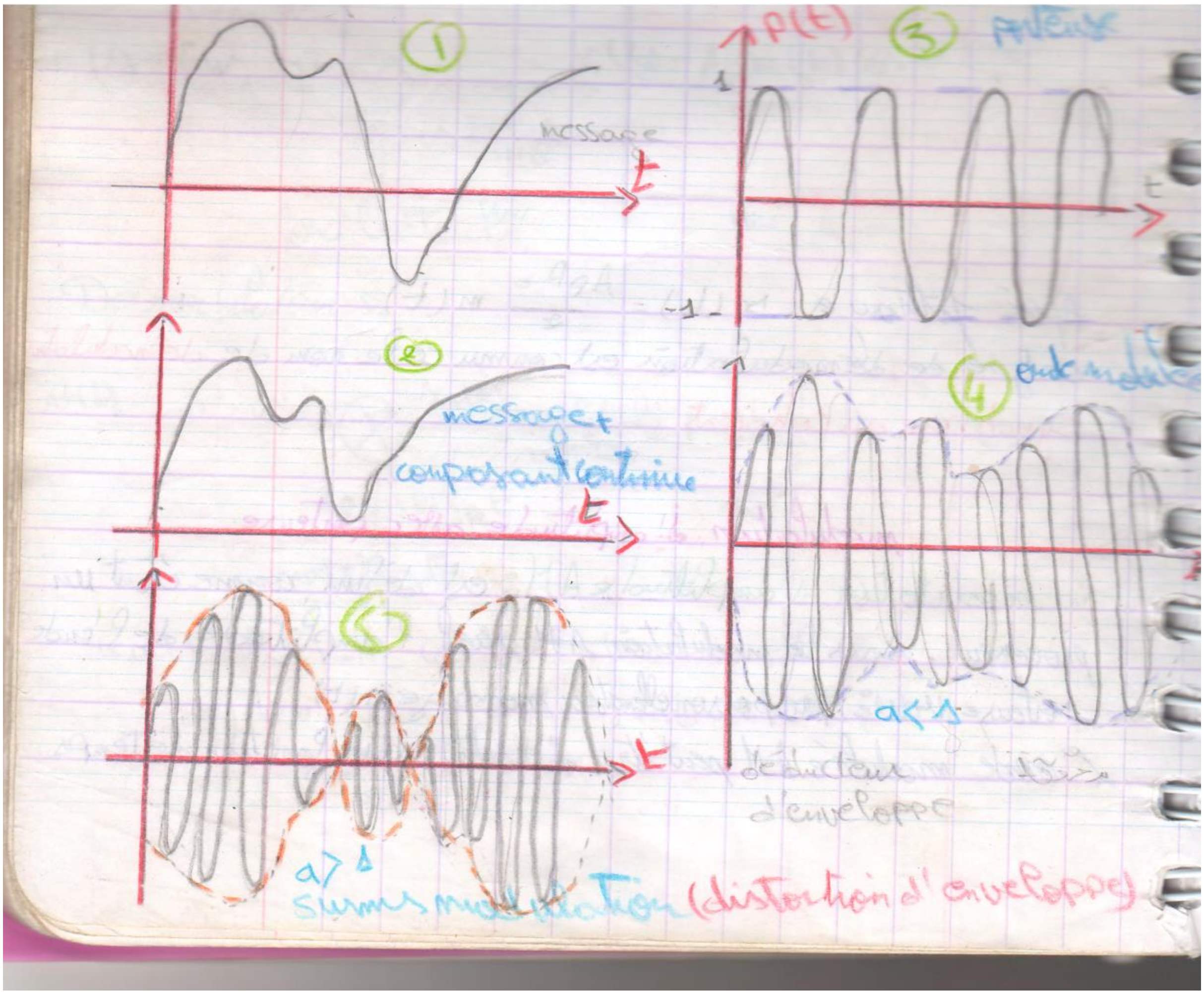


Figure 6. Onde modulée AM pour les cas $a < 1$ et $a > 1$.

3.1. Spectre de l'onde modulée AM

On veut tracer le spectre de l'onde modulée AM. On considère que le spectre du message $m(t)$ est celui représenté dans la figure ci-dessous.

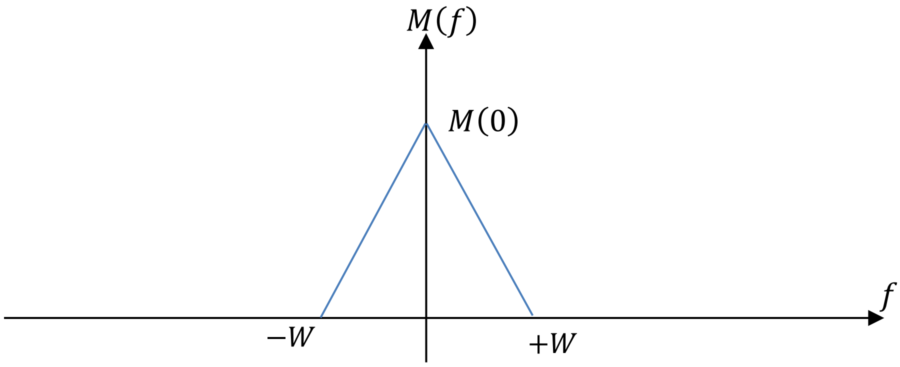


Figure 7. Spectre du message $m(t)$.

Pour tracer le spectre de l'onde modulée $v(t)$, il faut calculer la transformée de Fourier du signal $v(t)$.

$$v(t) = A_0\,[1 + k\,m(t)]\cos(2\pi f_0 t) = \underbrace{A_0\cos(2\pi f_0 t)}_{\text{Porteuse suplémentaire}} + A_0 k\,m(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

On remarque que l'onde modulée AM comporte une porteuse supplémentaire, d'où l'appellation modulation d'amplitude avec porteuse.

$$\begin{aligned}
\mathrm{TF}\{v(t)\} &= \mathrm{TF}\{A_0\cos(2\pi f_0 t) + A_0 k\,m(t)\cos(2\pi f_0 t)\} \\
&= \mathrm{TF}\left\{A_0\,\frac{e^{j2\pi f_0 t}+e^{-j2\pi f_0 t}}{2} + A_0\,k\,m(t)\,\frac{e^{j2\pi f_0 t}+e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right\} \\
&= \mathrm{TF}\left\{\frac{A_0}{2}\,e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A_0}{2}\,e^{-j2\pi f_0 t} + \frac{A_0\,k}{2}\,m(t)e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A_0\,k}{2}\,m(t)e^{-j2\pi f_0 t}\right\}
\end{aligned}$$

En utilisant la propriété de la linéarité, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathrm{TF}\{v(t)\} = \frac{A_0}{2}\mathrm{TF}\{e^{j2\pi f_0 t}\} + \frac{A_0}{2}\mathrm{TF}\{e^{-j2\pi f_0 t}\} + \frac{A_0\,k}{2}\mathrm{TF}\{m(t)e^{j2\pi f_0 t}\} \\
+ \frac{A_0\,k}{2}\mathrm{TF}\{m(t)e^{-j2\pi f_0 t}\}
\end{aligned}$$

Sachant que la $\mathrm{TF}\{1\} = \delta(f) \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{TF}\{1 \times e^{j2\pi f_0 t}\} = \delta(f - f_0) \\ \mathrm{TF}\{1 \times e^{-j2\pi f_0 t}\} = \delta(f + f_0) \end{cases}$

Donc

$$\mathrm{TF}\{v(t)\} = V(f) = \frac{A_0}{2}\delta(f - f_0) + \frac{A_0}{2}\delta(f + f_0) + \frac{A_0\,k}{2}M(f - f_0) + \frac{A_0\,k}{2}M(f + f_0)$$

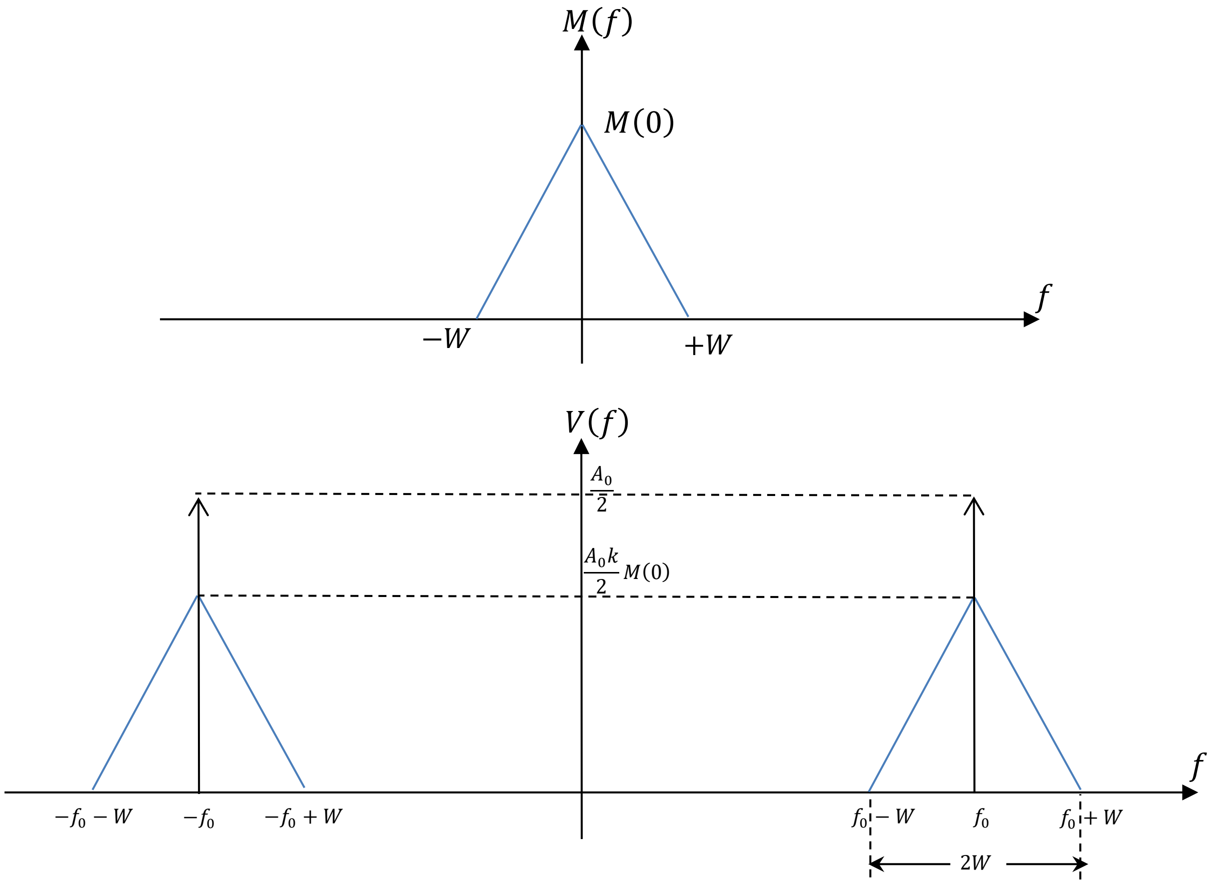


Figure 8. Spectre de l'onde modulée AM.

Il est claire à partir de la figure 2 qu'après modulation, la transmission nécessite une largeur de bande égale à $2W$. Nous avons deux bande latérales, chacune ayant une largeur W. Notons que le spectre de l'onde modulé AM (figure 8) diffère de celui de l'onde modulé DBLPS (figure 2) par la présence de deux impulsions de Dirac (en raison de la présence d'une porteuse supplémentaire dans l'expression de l'onde modulée AM).

3.2. Exemple (cas d'un message sinusoïdal)

Considérons une onde modulante de la forme : $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$

Dans ce cas, l'onde modulée AM est donnée par :

$$v(t) = A_0\,[1 + k\,m(t)]\cos(2\pi f_0 t) = A_0\,[1 + k\,A_m \cos(2\pi f_m t)]\cos(2\pi f_0 t)$$
$$= A_0\,[1 + a\cos(2\pi f_m t)]\cos(2\pi f_0 t)$$

où $a = k\,A_m$ est l'indice de modulation.

$$v(t) = A_0\,[1 + a\cos(2\pi f_m t)]\cos(2\pi f_0 t)$$
$$= A_0\cos(2\pi f_0 t) + A_0 a\cos(2\pi f_m t)\cos(2\pi f_0 t)$$

En utilisant la propriété :

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

L'expression de l'onde $v(t)$ devient :

$$v(t) = A_0\cos(2\pi f_0 t) + \frac{A_0 a}{2}\cos[2\pi(f_0+f_m)t] + \frac{A_0 a}{2}\cos[2\pi(f_0-f_m)t]$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathrm{TF}\{v(t)\} = V(f) \\ &= \frac{A_0}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)] + \frac{A_0 a}{4}\big[\delta\big(f-(f_0+f_m)\big)+\delta\big(f+(f_0+f_m)\big)\big] \\ &+ \frac{A_0 a}{4}\big[\delta\big(f-(f_0-f_m)\big)+\delta\big(f+(f_0-f_m)\big)\big]\end{aligned}$$

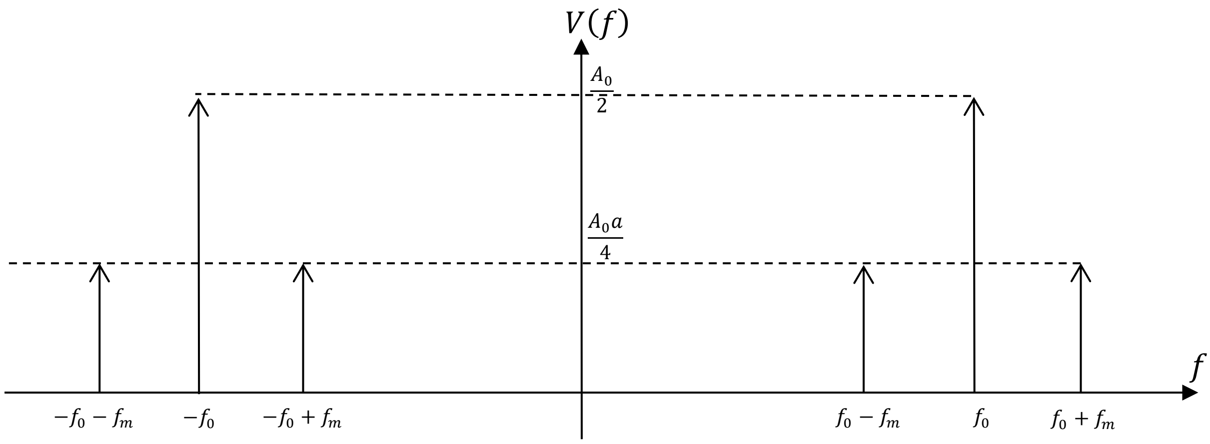


Figure 9. Spectre de l'onde modulée pour le cas d'une onde modulante sinusoïdale.

A partir de l'expression de l'onde modulée $v(t)$, l'enveloppe est :

$$E(t) = A_0\,[1+a\cos(2\pi f_m t)]$$

La valeur maximale de l'enveloppe est :

$$E_{max} = A_0(1+a)$$

La valeur minimale de l'enveloppe est :

$$E_{min} = A_0(1-a)$$

Donc

$$\frac{E_{max}}{E_{min}} = \frac{A_0(1+a)}{A_0(1-a)} = \frac{(1+a)}{(1-a)} \Longrightarrow a = \frac{E_{max}-E_{min}}{E_{max}+E_{min}}$$

La puissance moyenne normalisée est :

$$P = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [v(t)]^2 dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v^2(t)dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} v^2(t)dt$$

Pour un signal non périodique :

$$P = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v^2(t)dt$$

$$T \rightarrow \infty$$

$$v(t) = \underbrace{A_0\cos(2\pi f_0 t)}_{\text{Porteuse}} + \underbrace{\frac{A_0 a}{2}\cos[2\pi(f_0+f_m)t]}_{\text{Bande latérale supérieure}} + \underbrace{\frac{A_0 a}{2}\cos[2\pi(f_0-f_m)t]}_{\text{Bande latérale inférieure}}$$

La puissance de la porteuse est $\frac{{A_0}^2}{2}$

La puissance de la bande latérale supérieure est $\frac{{A_0}^2 a^2}{8}$

La puissance de la bande latérale inférieure est $\frac{{A_0}^2 a^2}{8}$

Le rapport de la puissance dans les deux bandes latérales sur la puissance totale est :

$$R = \frac{\frac{{A_0}^2 a^2}{8} + \frac{{A_0}^2 a^2}{8}}{\frac{{A_0}^2}{2} + \frac{{A_0}^2 a^2}{8} + \frac{{A_0}^2 a^2}{8}} = \frac{a^2}{2+a^2}$$

Pour $a = 0.1 = 10\% \Longrightarrow R = 0.497\% < 0.5\%$

Pour $a = 0.2 = 20\% \Longrightarrow R = 1.96\% < 2\%$

Pour $a = 0.3 = 30\% \Longrightarrow R = 4.31\% < 5\%$

Pour $a = 0.4 = 40\% \Longrightarrow R = 7.41\% < 8\%$

Pour $a = 0.5 = 50\% \Longrightarrow R = 11.11\% < 12\%$

Pour $a = 0.6 = 60\% \Longrightarrow R = 15.25\% < 16\%$

Pour $a = 0.7 = 70\% \Longrightarrow R = 19.68\% < 20\%$

Pour $a = 0.8 = 80\% \Longrightarrow R = 24.24\% < 20\%$

Pour $a = 0.9 = 90\% \Longrightarrow R = 28.83\% < 20\%$

Pour $a = 1 = 100\% \Longrightarrow R = R_{max} = \frac{1}{3} = 33.33\%$

Donc dans le cas $a = 1$ deux tiers de la puissance totale $\left(\frac{2}{3}\right)$ sont gaspillés au niveau de la porteuse.

3.3. Génération des ondes AM

Le rôle d'un **modulateur** AM est la génération de l'onde modulée AM. Donc, le modulateur modifie le message en une forme appropriée pour la transmission. Le message après modification est appelée onde modulée. L'entrée du modulateur est le message alors qu'au niveau de sa sortie on retrouve l'onde modulée AM.

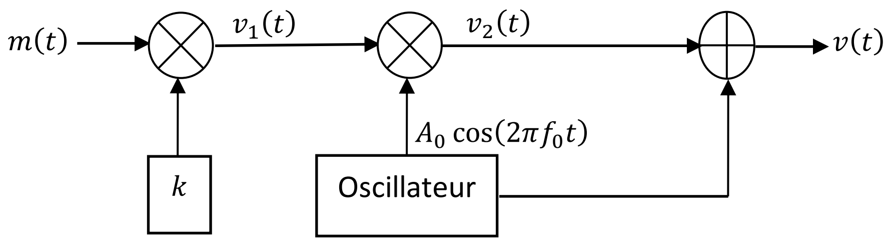


Figure 10. Modulateur AM.

A partir du système montré dans la figure 10, nous avons :

$v_1(t) = k\, m(t)$

$v_2(t) = v_1(t) \times A_0 \cos(2\pi f_0 t) = A_0 k\, m(t) \cos(2\pi f_0 t)$

$$v(t) = v_2(t) + A_0 \cos(2\pi f_0 t) = A_0 k\, m(t) \cos(2\pi f_0 t) + A_0 \cos(2\pi f_0 t)$$
$$= A_0 [1 + k\, m(t)] \cos(2\pi f_0 t)$$

Cette dernière expression représente une onde modulée AM.

3.4. Détection synchrone (cohérente)

Le rôle d'un **démodulateur** AM est la récupération du message à bande de base à partir de l'onde modulée AM. Donc, l'entrée du démodulateur est l'onde modulée AM alors qu'au niveau de sa sortie on doit récupérer le message.

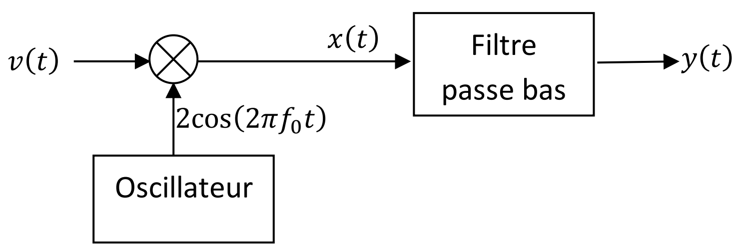


Figure 11. Démodulateur AM.

A l'entrée du démodulateur, nous avons :

$v(t) = A_0 [1 + k\, m(t)] \cos(2\pi f_0 t)$

$$x(t) = v(t) \times 2\ \cos(2\pi f_0 t) = A_0\,[1 + k\,m(t)]\cos\left(2\pi f_0 t\right) \times 2\ \cos(2\pi f_0 t)$$
$$= 2A_0\,[1 + k\,m(t)]\ \cos^2(2\pi f_0 t)$$

En utilisant la propriété trigonométrique

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

L'expression de $x(t)$ devient :

$$x(t) = 2A_0[1 + k\,m(t)]\frac{1 + \cos(4\pi f_0 t)}{2}$$
$$= A_0[1 + k\,m(t)] + A_0[1 + k\,m(t)]\ \cos(4\pi f_0 t)$$
$$= \underbrace{A_0}_{\text{basse fréquence}} + \underbrace{A_0\,k\,m(t)}_{\text{basse fréquence}} + \underbrace{A_0\cos(4\pi f_0 t)}_{\text{Haute fréquence}} + \underbrace{A_0\,k\,m(t)\cos(4\pi f_0 t)}_{\text{Haute fréquence}}$$

Note que A_0 est basse fréquence puisque :

$\mathrm{TF}\{\mathrm{A}_0\} = \mathrm{A}_0\mathrm{TF}\{1\} = \mathrm{A}_0\delta(f)$ (impulsion de Dirac à $f = 0$).

Donc après filtrage passe bas on obtient :

$y(t) = A_0 + A_0\,k\,m(t)$ (la composante continue A_0 ou la constante A_0 peut être éliminée par une capacité).

3.5. Détection non synchrone (Détecteur d'enveloppe)

Puisque la détection synchrone est difficile à réaliser en pratique, il est nécessaire donc d'utiliser une autre technique de démodulation. Cette technique est accomplie par l'utilisation d'un circuit simple et efficace connu sous le nom de détecteur d'enveloppe (envelope detector). Ce circuit est utilisé pratiquement dans tous les récepteurs radio AM. Le détecteur d'enveloppe est montré dans la figure 12 (a). Il est constitué d'une diode et d'un filtre réalisé à l'aide d'une capacité et d'une résistance. Nous supposons que la diode est idéale. Nous supposons également que l'onde AM appliquée à l'entrée du détecteur d'enveloppe est fournie par une source de tension d'impédance interne R_s.

L'onde modulée montrée dans la figure 12 (b) vérifie la condition$a < 1$. La sortie du détecteur d'enveloppe montrée dans la figure 12 (c) représente le message superposé à une composante continue (message + une constante).

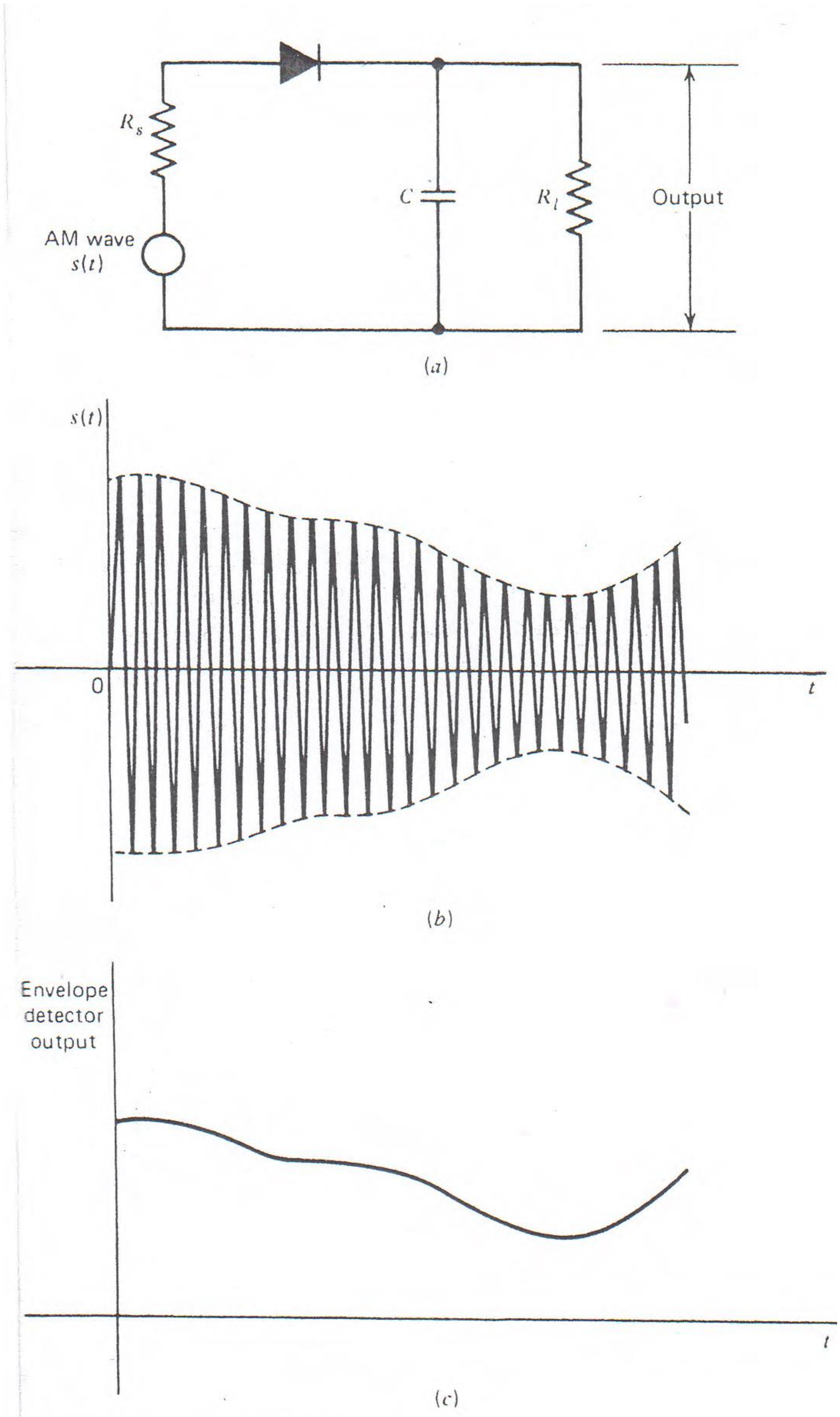


Figure 12. Détection non synchrone. (a) Circuit électrique du détecteur d'enveloppe. (b) Onde modulée à l'entrée du circuit. (c) Sortie du détecteur d'enveloppe (massage + une constante).

4. Modulation à bande latérale unique (BLU)

La modulation d'amplitude sans porteuse (DBLPS) et la modulation d'amplitude avec porteuse (AM) nécessitent une largeur de bande de transmission égale au double de la largeur de bande du message. Notons que la bande latérale supérieure ''BLS'' (Upper Side Band ''USB'') et la bande latérale inférieure ''BLS'' (Lower Side Band ''LSB'') sont symétriques (voir figure 13). Donc connaissant le spectre pour une bande, on peut déterminer le spectre de l'autre bande.

Donc la modulation à bande latérale unique repose principalement sur le principe que la transmission d'une seule bande (inférieure ou supérieure) suffit pour transmettre l'information. Dans la terminologie anglophone la modulation à bande latérale unique est connue sous le nom de ''Single Side Band modulation (SSB)''.

Les avantages de la modulation à bande latérale unique sont la réduction de la largeur de bande nécessaire pour la transmission et l'élimination de la puissance due à la transmission de la porteuse (porteuse supplémentaire). Par contre, la réalisation de la modulation à bande latérale unique est couteuse et compliquée.

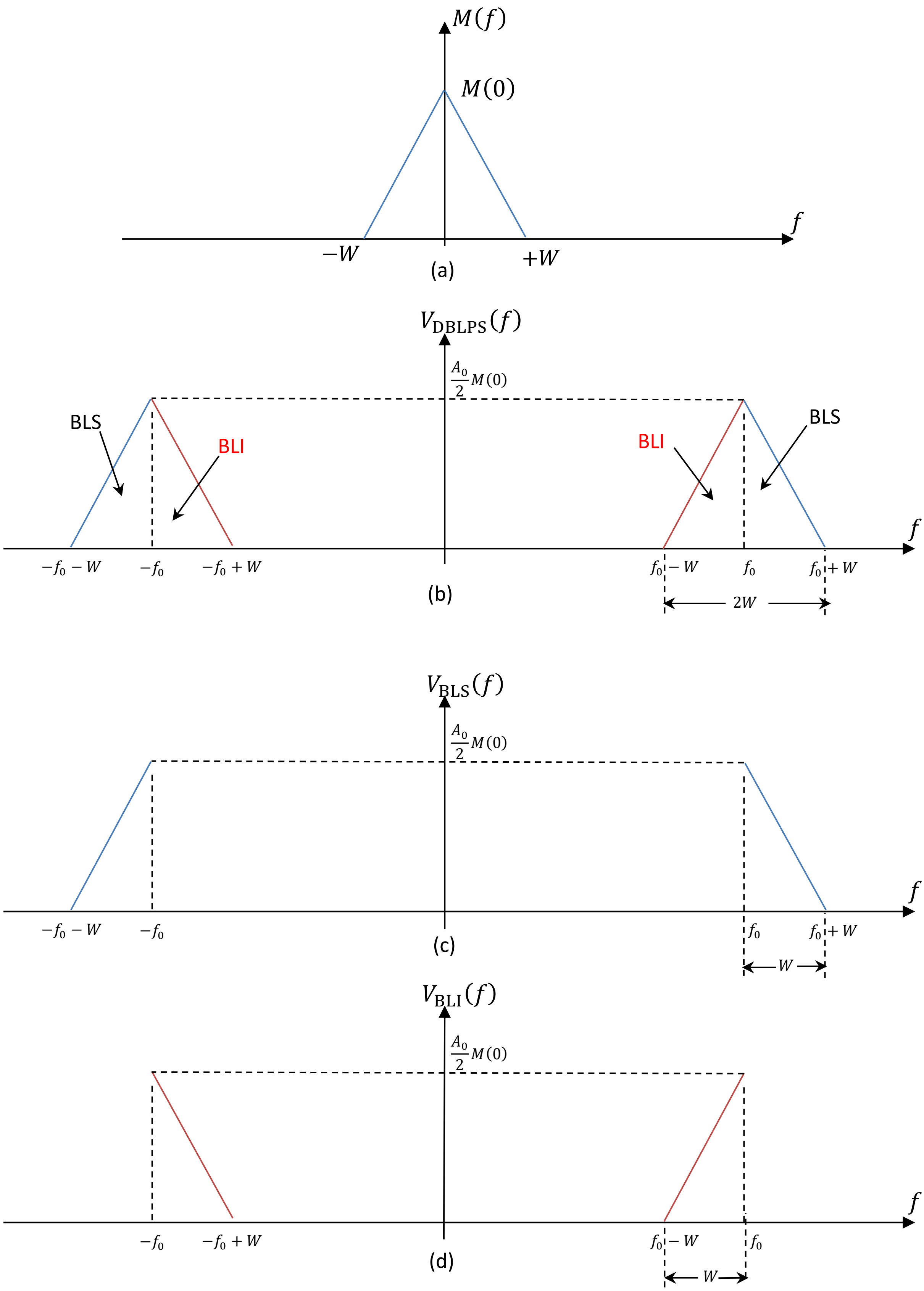


Figure 13. (a) Spectre du message. (b) Spectre de l'onde modulée DBLPS. (c) Spectre de l'onde modulée BLU avec bande latérale supérieure transmise. (d) Spectre de l'onde modulée BLU avec bande latérale inférieure transmise.

Chapitre III : Les modulations et démodulations angulaires

Il y'a deux formes de modulation d'angle :

- Modulation de phase

- Modulation de fréquence

De façon générale un signal de modulation d'angle est de la forme :

$$v(t) = A_0 \cos[\theta_i(t)]$$

$\theta_i(t)$: Angle instantané ou phase instantanée

La fréquence instantanée $f_i(t)$ est reliée à $\theta_i(t)$ par la relation suivante :

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta_i(t)}{dt}$$

1. Modulation de fréquence FM

C'est une forme de modulation d'angle où la fréquence instantanée $f_i(t)$ varie linéairement avec le message $m(t)$:

$$f_i(t) = f_0 + k_f\, m(t)$$

Pour déterminer l'expression de l'onde modulée FM, il faut déterminer tout d'abord l'angle instantané $\theta_i(t)$.

$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta_i(t)}{dt} \Rightarrow \theta_i(t) = 2\pi f_0 t + 2\pi\, k_f\, \int_0^t m(\alpha)\, d\alpha$

Donc l'expression de l'onde modulée FM est :

$$v(t) = A_0 \cos\left[2\pi f_0 t + 2\pi\, k_f \int_0^t m(\alpha)\, d\alpha\right]$$

2. Modulation de phase PM

C'est une forme de modulation d'angle où l'angle instantanée $\theta_i(t)$ varie linéairement avec le message $m(t)$:

$$\theta_i(t) = 2\pi f_0 t + k_p\, m(t)$$

Donc, l'expression de l'onde modulée PM est :

$$v(t) = A_0 \cos[2\pi f_0 t + k_p\, m(t)]$$

k_p : Constante de la modulation de phase.

Contrairement à la modulation d'amplitude, dans le cas des modulations FM et PM l'amplitude de l'onde modulée est constante.

3. Relation entre la modulation FM et PM

La relation entre la modulation FM et PM est illustrée dans la figure ci-dessous. Notons que pour générer une onde modulée FM à partir d'un modulateur PM, il faut utiliser un intégrateur. Et pour générer une onde modulée PM à partir d'un modulateur FM, il faut utiliser un dérivateur. Dans la suite de ce cours, nous allons détailler la modulation de fréquence FM.

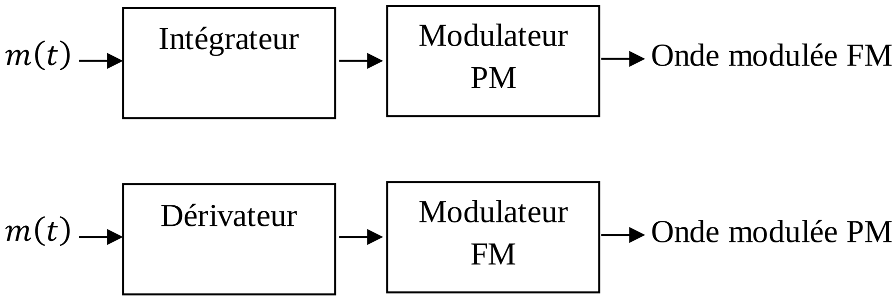


Figure 1. Relation entre la modulation FM et PM.

4. Onde modulée FM pour le cas d'un message sinusoïdal

Soit le message $m(t) = A_m \cos(\omega_m t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$

L'onde modulée FM peut être obtenue de la manière suivante :

$$v(t) = A_0 \cos\left[2\pi f_0 t + 2\pi\, k_f \int_0^t m(\alpha)\, d\alpha\right]$$

$$= A_0 \cos\left[2\pi f_0 t + 2\pi\, k_f \int_0^t A_m \cos(2\pi f_m \alpha)\, d\alpha\right]$$

$$= A_0 \cos\left[2\pi f_0 t + \frac{k_f\, A_m}{f_m} \sin(2\pi f_m t)\right]$$

Donc l'angle ou la phase instantanée est :

$$\theta_i(t) = 2\pi f_0 t + \frac{k_f\, A_m}{f_m} \sin(2\pi f_m t)$$

On va maintenant calculer la fréquence instantanée :

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta_i(t)}{dt}$$
$$= f_0 + k_f A_m \cos(2\pi f_m t)$$

La déviation de fréquence est : $k_f A_m \cos(2\pi f_m t)$

L'excursion de fréquence représente la déviation maximale de fréquence : $\delta = k_f A_m$

L'indice de modulation m est définit comme suit :

$$\beta = \frac{k_f A_m}{f_m} = \frac{\delta}{f_m}$$

Donc pour le cas d'un message sinusoïdal, l'onde modulée FM est donnée par l'expression suivante :

$$v(t) = A_0 \cos[2\pi f_0 t + \beta \sin(2\pi f_m t)]$$

5. Onde modulée FM à bande étroite (cas où $\beta << 1$)

Une onde modulée FM à bande étroite est obtenue pour un indice de modulation très petit.

$$v(t) = A_0 \cos[2\pi f_0 t + \beta \sin(2\pi f_m t)]$$
$$= A_0 \cos(2\pi f_0 t) \cos[\beta \sin(2\pi f_m t)] - A_0 \sin(2\pi f_0 t) \sin[\beta \sin(2\pi f_m t)]$$

Puisque $\beta << 1 \Rightarrow \begin{cases} \cos[\beta \sin(2\pi f_m t)] \approx 1 \\ \sin[\beta \sin(2\pi f_m t)] \approx \beta \sin(2\pi f_m t) \end{cases}$

$$\Rightarrow v(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t) - A_0 \beta \sin(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_m t)$$

En utilisant la relation trigonométrique :

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\}$$

On obtient :

$$v(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t) - \frac{A_0 \beta}{2}\cos[2\pi(f_0 - f_m)t] + \frac{A_0 \beta}{2}\cos[2\pi(f_0 + f_m)t]$$

Donc

$$\mathrm{TF}\{v(t)\} = V(f)$$
$$= \frac{A_0}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] - \frac{A_0 \beta}{4}[\delta(f - (f_0 - f_m)) + \delta(f + (f_0 - f_m))]$$
$$+ \frac{A_0 \beta}{4}[\delta(f - (f_0 + f_m)) + \delta(f + (f_0 + f_m))]$$

Le spectre de l'onde modulée $v(t)$ est représenté dans la figure ci-dessous.

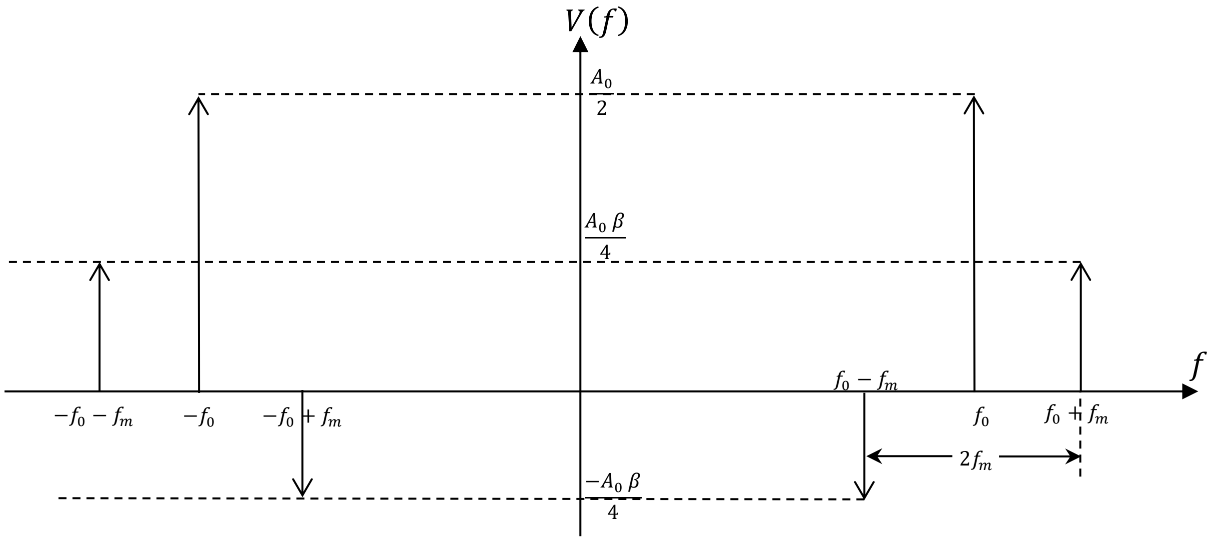


Figure 2. Spectre de l'onde modulée FM pour le cas d'une onde modulante sinusoïdale.

A partir de la figure 2, il est clair que la largeur de bande de transmission est $2f_m$. Cette largeur est considérée petite d'où l'appellation FM à bande étroite (voir FM à bande large dans la section 6).

6. Onde modulée FM à bande large

$v(t) = A_0 \cos[2\pi f_0 t + \beta \ \sin(2\pi f_m t)]$

Puisque $\mathcal{R}\mathrm{e}\left\{e^{j\theta}\right\} = \mathcal{R}\mathrm{e}\left\{\cos\theta + j\ \sin\theta\right\} = \cos\theta$ avec $\mathcal{R}\mathrm{e}$ désigne la partie réelle, on peut réécrire $v(t)$ sous la forme :

$$v(t) = A_0\ \mathcal{R}\mathrm{e}\left\{e^{j\ [2\pi f_0 t + \beta\ \sin(2\pi f_m t)]}\right\}$$
$$= A_0\ \mathcal{R}\mathrm{e}\left\{e^{j2\pi f_0 t}\ e^{j\ \beta \sin(2\pi f_m t)}\right\}$$

En utilisant la propriété :

$$e^{j\ \beta \sin(\omega_m t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) e^{j\ n\ \omega_m t}$$

On obtient :

$$v(t) = A_0\ \mathcal{R}\mathrm{e}\left\{e^{j2\pi f_0 t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) e^{j\ n\ \omega_m t}\right\}$$
$$= A_0\ \mathcal{R}\mathrm{e}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) e^{j\ 2\pi\ (f_0 + n f_m) t}\right\}$$

Donc finalement $v(t)$ peut s'écrire comme suit :

$$v(t) = A_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \cos[2\pi\,(f_0 + nf_m)t]$$

Dans les équations ci-dessus, $J_n(\beta)$ est la fonction de Bessel du première espèce et d'ordre n.

Calculons la transformée de Fourier de $v(t)$

$$\mathrm{TF}\{v(t)\} = \mathrm{TF}\left\{A_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \cos[2\pi\,(f_0 + nf_m)t]\right\}$$

En utilisant la propriété de la linéarité, on obtient

$$\mathrm{TF}\{v(t)\} = A_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta)\, \mathrm{TF}\{\cos[2\pi\,(f_0 + nf_m)t]\}$$

$$= \frac{A_0}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \left[\delta\big(f - (f_0 + nf_m)\big) + \delta\big(f + (f_0 + nf_m)\big)\right]$$

Et donc la transformée de Fourier de $v(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$\mathrm{TF}\{v(t)\} = V(f) = \frac{A_0}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta)\, \delta\big(f - (f_0 + nf_m)\big) + \frac{A_0}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta)\, \delta\big(f + (f_0 + nf_m)\big)$$

Donc le signal FM est constitué de contenu fréquentiel à

$f_0, f_0 \pm f_m, f_0 \pm 2f_m, f_0 \pm 3f_m, \cdots$(cas du spectre monolatéral ou spectre dans la partie des fréquences positives)

à $-f_0, -(f_0 \pm f_m), -(f_0 \pm 2f_m), -(f_0 \pm 3f_m), \cdots$

Théoriquement il y a une infinité de bandes latérales, mais en étudiant les fonctions $J_n(\beta)$, on constate que pour un β donné, il y a un nombre entier N tel que pour les $n > N$, la valeur de $J_n(\beta)$ est négligeable.

Donc il y a seulement un nombre fini de bandes latérales significatives. Il y a $2N$ bandes latérales et donc la largeur de bande du signal FM est $2Nf_m$. N dépend de la valeur de β et de ce qu'on considère comme négligeable.

Critère de 10%

Selon ce critère, on ne tient compte que des $J_n(\beta) > 0.1$ $(0.1 = 10\%)$

Critère de 1%

Selon ce critère, on ne tient compte que des $J_n(\beta) > 0.01$ $(0.01 = 1\%)$

Exemple

Prenons l'exemple de $\beta = 7$

$J_0(7)$	$J_1(7)$	$J_2(7)$	$J_3(7)$	$J_4(7)$	$J_5(7)$	$J_6(7)$
0.3001	-0.0047	-0.3014	-0.1676	0.1578	0.3479	0.3392
$J_7(7)$	$J_8(7)$	$J_9(7)$	$J_{10}(7)$	$J_{11}(7)$	$J_{12}(7)$	$J_{13}(7)$
0.2336	0.128	0.0580	0.02354	0.00833	0.00266	0.0002

Pour le critère de 10%, nous avons $N = 8 \Longrightarrow$ la largeur de bande du signal FM est $\mathrm{BP} = 2 \times 8f_m = 16f_m$.

Pour le critère de 1%, nous avons $N = 10 \Longrightarrow$ la largeur de bande du signal FM est $\mathrm{BP} = 2 \times 10f_m = 20f_m$.

Règle de Carson

On peut également calculer la largeur de bande du signal FM en utilisant la règle de Carson :

$\mathrm{BP} = 2(\beta + 1)f_m$

Dans les travaux dirigés, nous avons donné un exemple détaillé sur la manière de tracer le spectre d'une onde modulée FM.

7. Génération des signaux FM (FM indirecte ou méthode d'Armstrong)

Le modulateur FM est montré dans la figure ci-dessous.

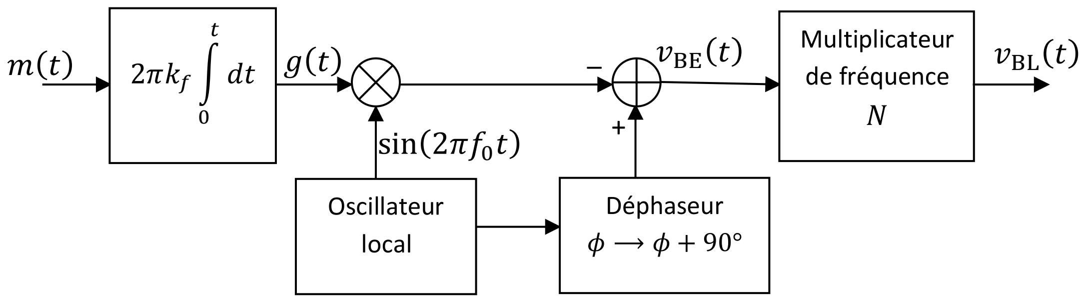


Figure 3. Modulateur FM utilisant la méthode indirecte.

Nous avons :

$$g(t) = 2\pi k_f \int_0^t m(t)\,dt$$

Ce modulateur fonctionne sous la condition $g(t) << 1$.

Puisque $g(t) << 1 \Longrightarrow \begin{cases} \cos g(t) \approx 1 \\ \sin g(t) \approx g(t) \end{cases}$

A partir du schéma de la figure 3, nous avons :

$$v_{BE}(t) = -\,g(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t) + \sin\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\,g(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t) + \cos(2\pi f_0 t) \times 1$$

Puisque $g(t) << 1$, on peut écrire $v_{BE}(t)$ de la manière suivante :

$$v_{BE}(t) = -\ \sin g(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t) + \cos(2\pi f_0 t) \cdot \cos g(t)$$

En utilisant la propriété :

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta$$

L'expression de $v_{BE}(t)$ se réduit à

$$v_{BE}(t) = \cos[2\pi f_0 t + g(t)]$$

$$= \cos\left[2\pi f_0 t + 2\pi k_f \int_0^t m(t)\,dt\right]$$

$v_{BE}(t)$ est une onde modulée FM à **b**ande **é**troite. L'utilisation du multiplicateur de fréquence permet de convertir l'onde modulée FM à bande étroite en une onde FM à **b**ande **l**arge $\left(v_{BL}(t)\right)$:

$$v_{BL}(t) = \cos\left[2\pi N f_0 t + 2\pi N k_f \int_0^t m(t)\,dt\right]$$

La méthode utilisée dans la figure 3 pour générer une onde FM est qualifiée de méthode indirecte puisque pour générer une onde FM à bande large, il faut tout d'abord transiter (passer) par la génération d' une onde FM à bande étroite.

8. Démodulation des signaux FM (dérivation et détection d'enveloppe)

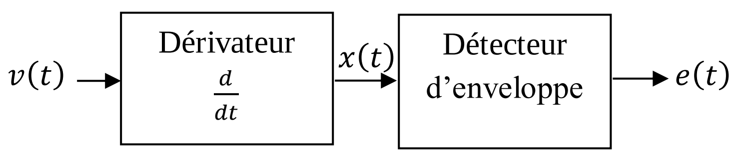


Figure 4. Démodulateur FM.

A l'entrée du démodulateur, nous avons l'onde modulée FM :

$$v(t) = A_0 \cos\left[2\pi f_0 t + 2\pi\, k_f \int_0^t m(t)\ dt\right]$$

$$x(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A_0\left(2\pi f_0 + 2\pi\, k_f m(t)\right)\sin\left[2\pi f_0 t + 2\pi\, k_f \int_0^t m(t)\ dt\right]$$

A la sortie du détecteur d’enveloppe, on obtient l’enveloppe de $x(t)$:

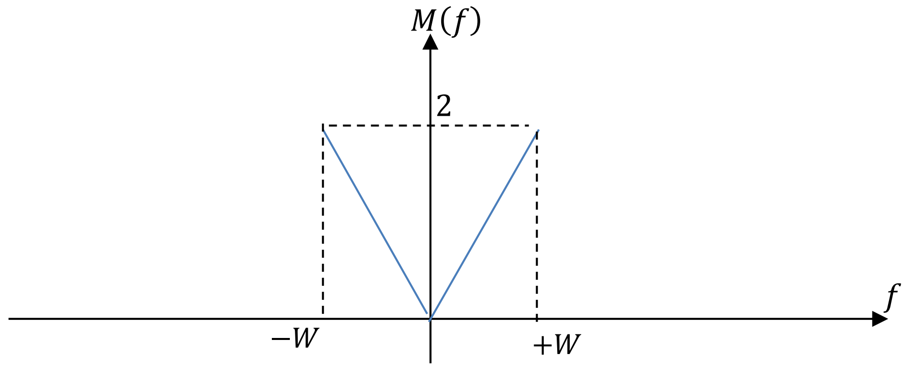
$$e(t) = -A_0 2\pi f_0 - A_0 2\pi\, k_f\, m(t)$$

Série de TD 1

Exercice 1

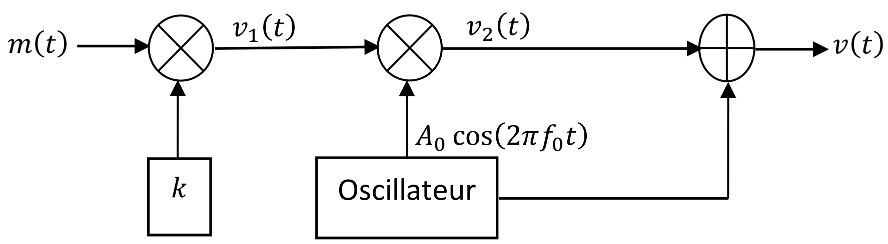
Tracer le spectre de l'onde modulée DBLPS dans le cas où le spectre du message $m(t)$ est celui représenté dans la figure ci-dessous.

- Montrer que l'onde modulée est un signal haute fréquence.
- Quelle est la largeur de bande nécessaire pour la transmission de l'information après modulation.



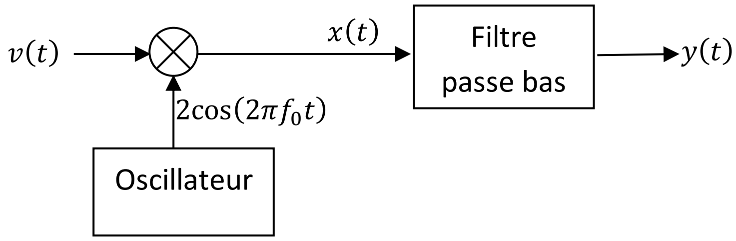
Exercice 2

Montrer que le système représenté dans la figure ci-dessous joue le rôle d'un modulateur AM.



Exercice 3

Afin de récupérer le message à bande de base à partir de l'onde modulée AM, nous utilisons le système montré dans la figure ci-dessous.



a- Donner l'expression de l'onde $v(t)$.

b- Donner l'expression de l'onde $x(t)$.

c- Déterminer le signal à la sortie du filtre passe bas.

d- Est-ce-que l'opération de démodulation est réalisée avec succès.

Solution de la Série de TD 1

Solution de l'exercice 1

L'onde modulée DBLPS est donnée par l'expression suivante :

$v(t) = A_0\, m(t) \cos(2\pi f_0 t)$

Pour tracer le spectre de l'onde modulée $v(t)$, on va tout d'abord calculer la transformée de Fourier du signal $v(t)$.

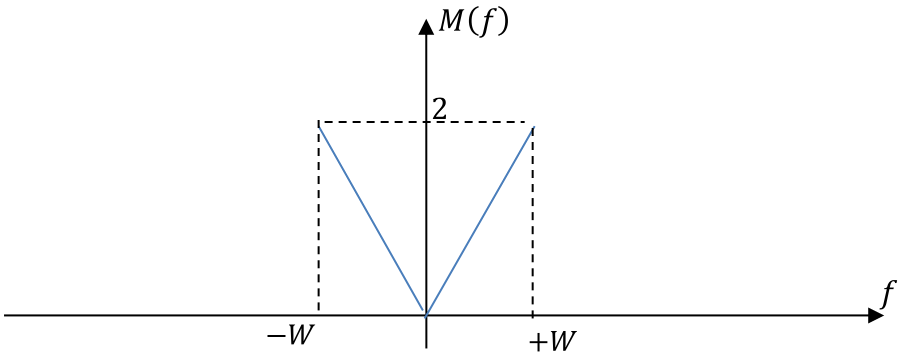
$$\begin{aligned}\mathrm{TF}\{v(t)\} &= \mathrm{TF}\{A_0\, m(t) \cos(2\pi f_0 t)\}\\ &= \mathrm{TF}\left\{A_0\, m(t) \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right\}\\ &= \mathrm{TF}\left\{\frac{A_0}{2} m(t) e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A_0}{2} m(t) e^{-j2\pi f_0 t}\right\}\end{aligned}$$

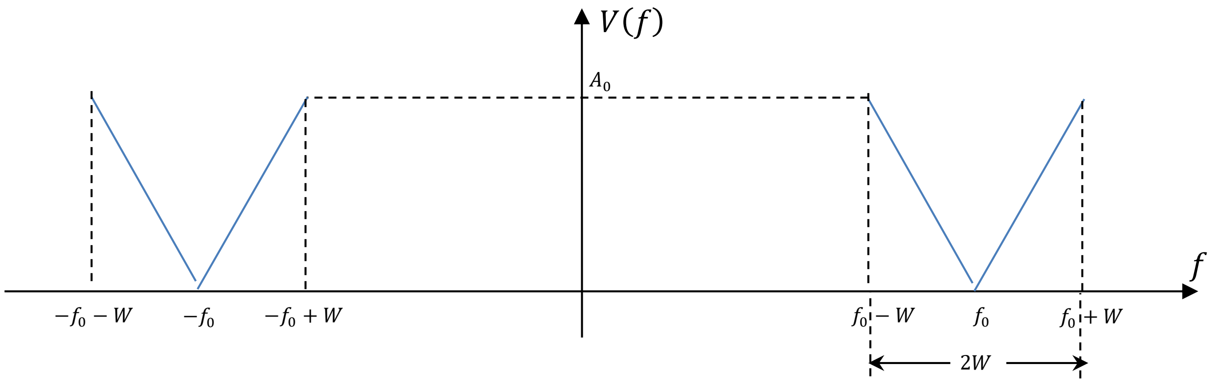
En utilisant la propriété de la linéarité, on trouve

$$\mathrm{TF}\{v(t)\} = \frac{A_0}{2} \mathrm{TF}\{\, m(t) e^{j2\pi f_0 t}\} + \frac{A_0}{2} \mathrm{TF}\{\, m(t) e^{-j2\pi f_0 t}\}$$

En utilisant la propriété de décalage fréquentiel, on obtient

$$\mathrm{TF}\{v(t)\} = V(f) = \frac{A_0}{2}\{M(f - f_0) + M(f + f_0)\}$$



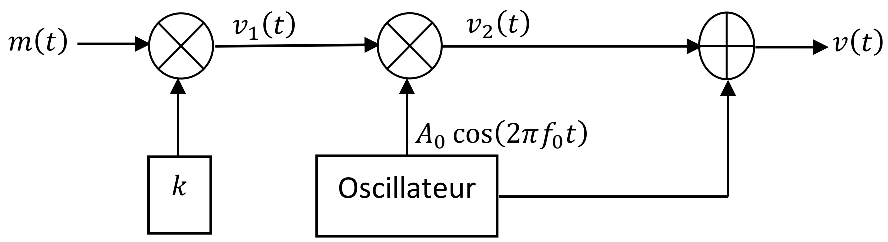


- A partir du spectre de l'onde modulée, on constate que la plus petite fréquence est $f_0 - W$. Puisque la fréquence de la porteuse f_0 est très grande et W est une fréquence faible, on conclue alors que $f_0 - W$ est une fréquence très grande $\Longrightarrow$ l'onde modulée $v(t)$ est haute fréquence.

- La largeur de bande nécessaire pour la transmission de l'information après modulation est $2W$ (modulation double bande latérale).

Solution de l'exercice 2

Afin de montrer que ce système joue le rôle d'un modulateur AM, il faut qu'au niveau de la sortie de ce système on retrouve l'onde modulée AM.



A partir du système montré dans la figure, nous avons :

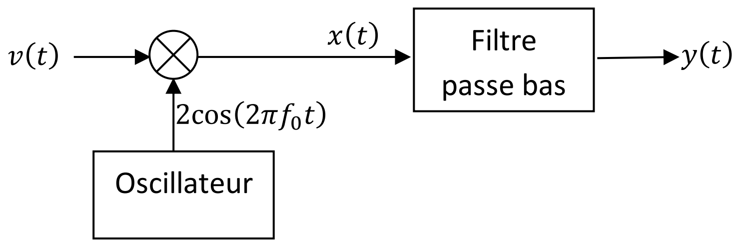
$v_1(t) = k\, m(t)$

$v_2(t) = v_1(t) \times A_0 \cos(2\pi f_0 t) = A_0 k\, m(t) \cos(2\pi f_0 t)$

$$v(t) = v_2(t) + A_0 \cos(2\pi f_0 t) = A_0 k\, m(t)\cos(2\pi f_0 t) + A_0 \cos(2\pi f_0 t)$$
$$= A_0\,[1 + k\, m(t)] \cos(2\pi f_0 t)$$

Cette dernière expression représente une onde modulée AM, et donc ce système est un modulateur AM.

Solution de l'exercice 3



a- A l'entrée du système, nous avons l'onde modulée AM. Donc, l'expression de $v(t)$ est :

$v(t) = A_0\,[1 + k\,m(t)]\cos\left(2\pi f_0 t\right)$

b- L'expression de $x(t)$ est :

$$x(t) = v(t) \times 2\ \cos(2\pi f_0 t) = A_0\,[1 + k\,m(t)]\cos\left(2\pi f_0 t\right) \times 2\ \cos(2\pi f_0 t)$$
$$= 2A_0\,[1 + k\,m(t)]\ \cos^2(2\pi f_0 t)$$

En utilisant la propriété trigonométrique

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

L'expression de $x(t)$ devient :

$$x(t) = 2A_0[1 + k\,m(t)]\frac{1 + \cos(4\pi f_0 t)}{2}$$
$$= A_0[1 + k\,m(t)] + A_0[1 + k\,m(t)]\ \cos(4\pi f_0 t)$$
$$= \underbrace{A_0}_{\text{basse fréquence}} + \underbrace{A_0\,k\,m(t)}_{\text{basse fréquence}} + \underbrace{A_0\cos(4\pi f_0 t)}_{\text{Haute fréquence}} + \underbrace{A_0\,k\,m(t)\cos(4\pi f_0 t)}_{\text{Haute fréquence}}$$

Note que A_0 est basse fréquence puisque :

$\mathrm{TF}\{\mathrm{A}_0\} = \mathrm{A}_0\mathrm{TF}\{1\} = \mathrm{A}_0\delta(f)$ (impulsion de Dirac à $f = 0$).

c- Le signal à la sortie du filtre passe bas est :

$y(t) = A_0 + A_0\,k\,m(t)$ (la composante continue A_0 ou la constante A_0 peut être éliminée par une capacité).

d- Puisque nous avons récupérer le message au niveau de la sortie, l'opération de démodulation est réalisée avec succès.