

Chapitre 3 : Les écoulements non permanents dans les conduites en charge

3.1. Ecoulements quasi-permanents (vidange d'un réservoir vers une rivière, vidange d'un réservoir vers un autre)

Écoulement permanent stationnaire

Un écoulement est **stationnaire** par rapport à un référentiel lorsque la vitesse et les autres variables ne dépendent plus du temps. Il y a alors identité entre trajectoire, ligne d'émission et ligne de courant, les systèmes référentiels devenant identiques.

Au sens strict, l'écoulement dans les canaux est rarement permanent. Néanmoins les variations temporelles $\frac{\partial v}{\partial t}$ sont, dans certains cas, suffisamment lentes pour que l'écoulement puisse être considéré comme une succession de régime permanent. On peut alors définir ainsi le régime quasi-permanent.

Nombre de Strouhal : Le nombre de Strouhal est un nombre sans dimension décrivant les mécanismes de circulation oscillante. Physiquement, il représente le rapport du temps d'advection et du temps caractéristique de l'instationnarité :

$$\text{Str} = Lc/U_c t_c = \frac{Lc}{U_c} = f \frac{Lc}{U_c}$$

$\frac{Lc}{U_c}$ - temps d'advection, c'est-à-dire le temps qu'il faut à une perturbation pour être advecté de l'entrée à la sortie du domaine.

(L'advection est le transport d'une quantité (scalaire ou vectorielle) d'un élément donné (tel que la chaleur, l'énergie interne (l'énergie interne représente l'ensemble de toutes les énergies qui se manifestent à l'échelle microscopique : l'énergie cinétique des particules, les énergies d'interaction, etc. Sa variation entre deux instants est notée ΔU . $\Delta U = U_2 - U_1$ ou $U(\text{final}) - U(\text{initial})$, un élément chimique, des charges électriques) par le mouvement (et donc la vitesse) du milieu environnant.

Il(Str) permet donc de caractériser l'instationnarité du mouvement, notamment tourbillonnaire (f est la fréquence d'émission des tourbillons). Si le nombre de Strouhal Str est nettement inférieur à l'unité, l'écoulement est dit quasi-stationnaire.

Vidange

Généralités

Pour permettre le nettoyage des réservoirs, ainsi que d'éventuelles réparations, il est nécessaire de pouvoir les vidanger, au moyen d'une conduite généralement raccordée à la conduite de trop-plein. On a intérêt à n'effectuer une vidange que sur un réservoir presque vidé en exploitation. Lorsque l'on désire assurer la distribution pendant la vidange d'un réservoir non compartimenté, il suffit de disposer d'un by-pass (circuit d'évitement contournant une installation, un dispositif) reliant la conduite d'amenée à la conduite de départ.

Remarque: le trop-plein a pour objet d'assurer sans déversement du réservoir l'évacuation du débit d'adduction (désigne l'ensemble des techniques permettant de transporter l'eau par canalisation de sa source à son lieu de consommation), pour le

cas où la pompe d'alimentation ne serait pas arrêtée. Il doit donc être dimensionné pour ce débit, et conduire l'eau à l'extérieur en tenant compte des pertes de charge et en limitant la vitesse dans la conduite de trop-plein à 3 ou 4 m/s. Le trop-plein est donc un système permettant la régulation, par débordement, du niveau de l'eau d'un réservoir ou d'un récipient. Il (le trop-plein) consiste à éviter un remplissage excessif pouvant causer des dommages supérieurs à ceux éventuellement acceptés par un débordement contrôlé.

vidange d'un réservoir vers une rivière, vidange d'un réservoir vers un autre réservoir

Rappel sur les pertes de charges locales

Préalablement, il y a lieu de rappeler que les pertes de charges locales sont causées par les frottements et les décollements de la couche limite dans des accessoires tels que des coudes, des raccords, des té, des réductions ou expansions, des clapets, des robinets-vannes, etc. Chaque accessoire possède un coefficient, déterminé expérimentalement par le fabricant, qui dépend essentiellement de sa forme et de son matériau. La perte causée par un des accessoires s'écrit :

$$\Delta H = C_L \frac{V^2}{2g}$$

Lorsque la géométrie de la pièce comporte une entrée et une sortie de section différente, les vitesses d'entrée et de sortie sont différentes. Il est important de connaître par rapport à laquelle de ces deux vitesses le coefficient CL est associé.

On peut aussi exprimer cette perte de charge en fonction du débit :

$$\Delta H = \frac{C_L}{2gA^2} Q^2$$

Pour des sections circulaires, cela devient :

$$\Delta H = \frac{8C_L}{\pi^2 g D^4} Q^2$$

Plusieurs exemples de valeurs de ce coefficient sont donnés dans « A brief introduction to fluid mechanics » de Young et al.

Diagramme d'énergie

Principes

La ligne d'énergie est utilisée pour connaître la répartition des énergies potentielle, de pression, cinétique ainsi que les pertes et les gains d'énergie le long d'un circuit hydraulique. L'énergie totale est définie par l'équation de Bernoulli :

$$E = z + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} \pm \Delta H$$

ΔH - est soit une perte d'énergie (positif) ou un gain d'énergie (négatif) apporté en général par une pompe.

On trace le long du circuit à chaque point du trajet l'altitude z , la pression $\frac{P}{\gamma}$, l'énergie de vitesse $V^2/2g$ et le niveau de pertes accumulé. Dans ce qui suit nous allons présenter quelques exemples comment tracer systématiquement les diagrammes d'énergie.

Calculs hydrauliques

Dans les exemples précédents, il faut calculer les pertes de charge et les débits pour pouvoir évaluer les pressions ainsi que les énergies cinétiques.

Conduite de diamètre constant entre deux réservoirs (Fig. 1)

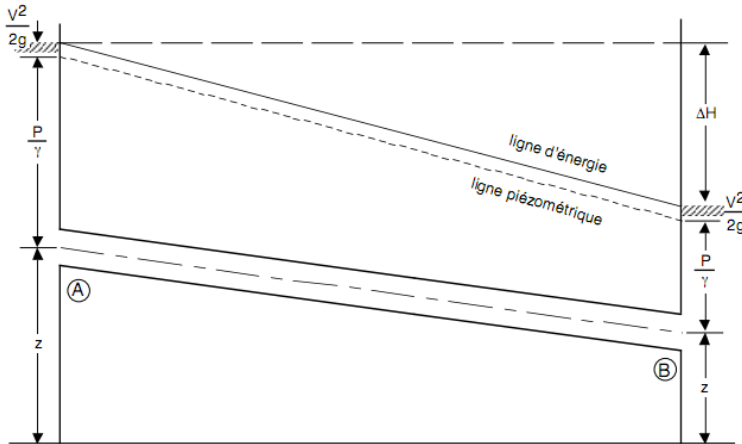


Fig. 1. Conduite de diamètre constant entre deux réservoirs.

Dans cette configuration, on peut évaluer le débit qui passe d'un réservoir à l'autre en utilisant l'équation de Bernoulli ($z + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = H = cste$). Sachant que la charge dans le réservoir du côté A est :

$$E_A = \frac{P_A}{\gamma} + z_A + \frac{V_A^2}{2g} = H_A$$

et que, pareillement pour le côté B :

$$E_B = \frac{P_B}{\gamma} + z_B + \frac{V_B^2}{2g} = H_B$$

en tenant compte des pertes de charge, on obtient :

$$H_A - H_B = \Delta H$$

La perte de charge totale étant causée par le frottement dans la conduite si on néglige les pertes locales aux entrée et sortie des réservoirs, est :

$$\Delta H = \frac{fL}{D} \frac{V^2}{2g} = \frac{8fL}{\pi^2 g D^5} Q^2$$

La perte de charge totale étant égale à la différence de niveau entre les réservoirs, seul le débit est inconnu :

$$Q = \pi \sqrt{\frac{g(H_A - H_B)}{8 \frac{fL}{D^5}}}$$

Conduites de diamètres différents entre deux réservoirs avec perte de charge locale à la restriction(fig. 2)

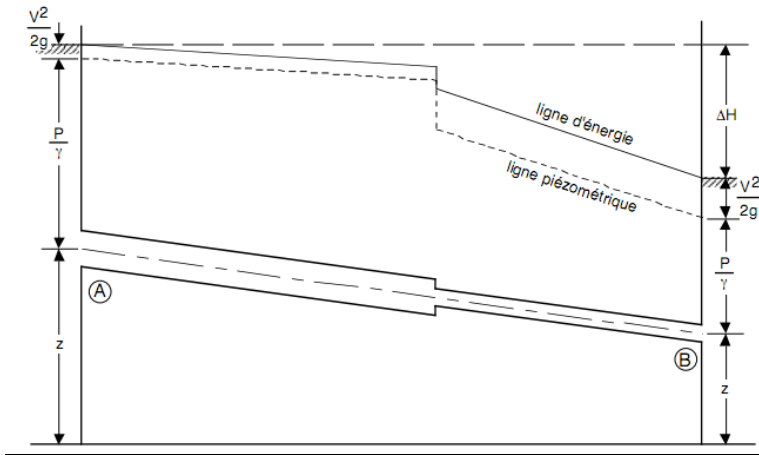


Fig. 2. Conduites de diamètres différents entre deux réservoirs avec perte de charge locale à la restriction.

Deux aspects sont à considérer :

- Le même débit traverse les deux conduites.
- La perte de charge totale est égale à la différence de niveau entre les réservoirs et elle est composée de la perte par frottement dans la première conduite de longueur L_1 et diamètre D_1 , de la perte par frottement dans la deuxième conduite de longueur L_2 et diamètre D_2 et de la perte singulière dans le rétrécissement

On peut donc écrire :

$$\Delta H = \frac{8}{\pi^2 g} \left(\frac{f L_1}{D_1^5} + \frac{f L_2}{D_2^5} + \frac{C_L}{D_2^4} \right) Q^2$$

D'où :

$$Q = \pi \sqrt{\frac{g(H_A - H_B)}{8 \left(\frac{f L_1}{D_1^5} + \frac{f L_2}{D_2^5} + \frac{C_L}{D_2^4} \right)}}$$

Réduction de diamètres de conduite entre deux réservoirs avec pertes de charge locales aux changements de diamètre (Fig. 3)

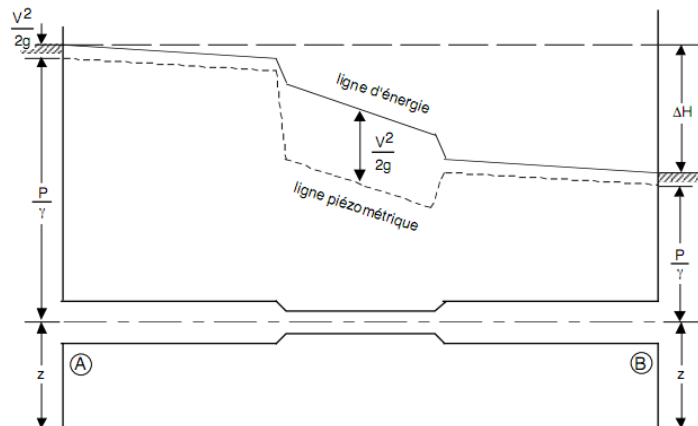


Fig. 3. Réduction de diamètres de conduite entre deux réservoirs avec pertes de charge locales aux changements de diamètre.

En raisonnant de la même façon que précédemment, on trouve :

$$\Delta H = \frac{8}{\pi^2 g} \left(\frac{f L_1}{D_1^5} + \frac{f L_2}{D_2^5} + \frac{f L_3}{D_3^5} + \frac{C_{L1}}{D_2^4} + \frac{C_{L2}}{D_3^4} \right) Q^2$$

D'où :

$$Q = \frac{\pi}{D^2} \sqrt{\frac{g(H_A - H_B)}{8 \left(\frac{f L_1}{D_1} + \frac{f L_2}{D_2} + \frac{f L_3}{D_3} + C_{L2} + C_{L3} \right)}}$$

Conduite et robinet-vanne entre deux réservoirs(fig. 4)

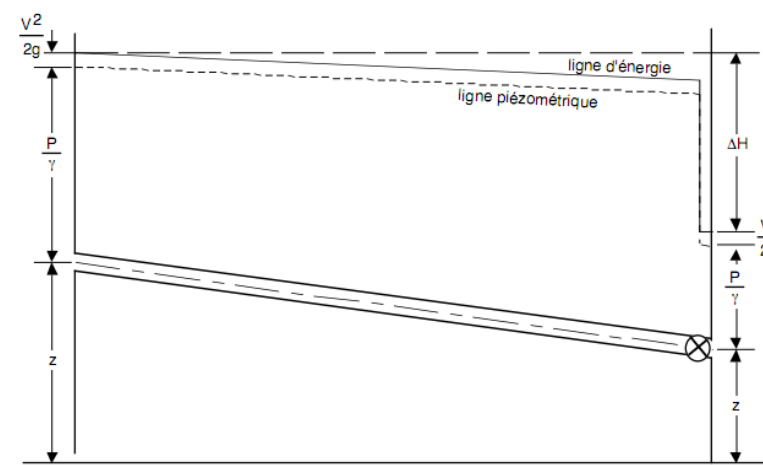


Fig. 4. Conduite et robinet-vanne entre deux réservoirs.

Dans un robinet – vanne, le coefficient de perte de charge locale C_L varie de près de zéro à l'infini,

$$Q = \pi \sqrt{\frac{g(H_A - H_B)}{8\left(\frac{fL}{D^5} + \frac{C_L}{D^4}\right)}}$$

d'où :

Conduite entre un réservoir et une sortie à l'air libre(Fig. 5)

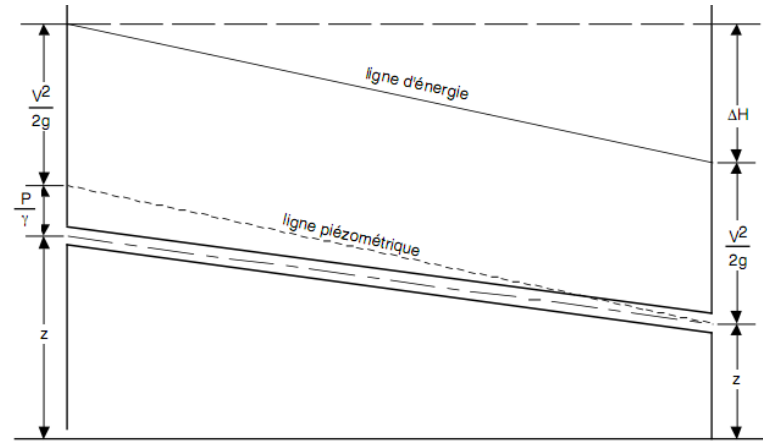


Fig. 5. Conduite entre un réservoir et une sortie à l'air libre.

Ici puisque l'écoulement sort en B à la pression atmosphérique, $P_B = 0$ et V_B est inconnu (comme on n'arrive pas dans un réservoir dont le niveau est connu, le niveau de charge nette est inconnu). On écrit alors :

$$H_A - \left(z_B + \frac{V_B^2}{2g}\right) = \Delta H$$

En posant :

$$V^2 = \frac{Q^2}{A^2}$$

Il vient :

$$H_A - z_B = \frac{8}{\pi^2 g D^4} \left(1 + \frac{fL}{D}\right) Q^2$$

Finalement :

$$Q = \pi D \sqrt{\frac{g(H_A - z_B)}{8\left(1 + \frac{fL}{D}\right)}}$$

Conduites et coudes entre deux réservoirs (fig. 6)

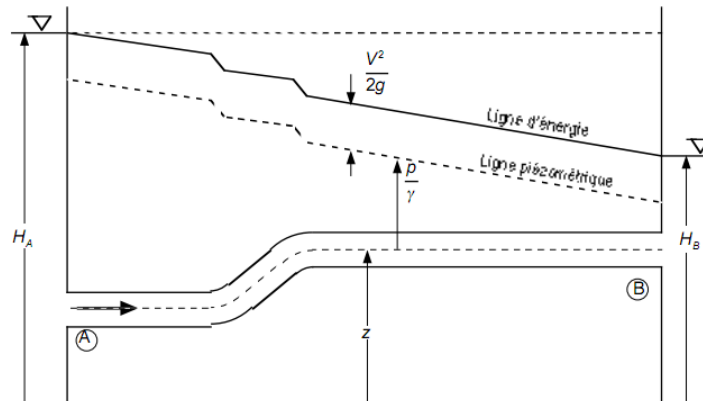


Fig. 6. Conduites et coudes entre deux réservoirs

Ici on considère le diamètre constant et on regroupe en L toutes les longueurs de conduites. On obtient alors, en raisonnant comme précédemment :

$$Q = \frac{\pi}{D^2} \sqrt{\frac{g(H_A - H_B)}{8\left(\frac{fL}{D} + C_{L1} + C_{L2}\right)}}$$

Conduites et pompe entre deux réservoirs

La pompe apporte un supplément d'énergie que l'on peut voir comme une perte de charge négative.

En écrivant l'équation de Bernoulli aux deux réservoirs, il vient :

$$\underbrace{\frac{P_A}{\gamma}}_{H_A} + z_A + \underbrace{\frac{V_A^2}{2g}}_0 = \underbrace{\frac{P_B}{\gamma}}_{H_B} + z_B + \underbrace{\frac{V_B^2}{2g}}_0 + \Delta H_{AB} - \Delta H_P + \Delta H_{BC}$$

En simplifiant, on obtient :

$$\Delta H = H_A - H_B = \frac{fL}{D} \frac{V^2}{2g} \Big|_{AB} - \Delta H_P + \frac{fL}{D} \frac{V^2}{2g} \Big|_{BC}$$

Le gain de charge ΔH_P varie en fonction du débit selon une courbe décroissante dont l'allure est donnée à la figure ci-dessous :

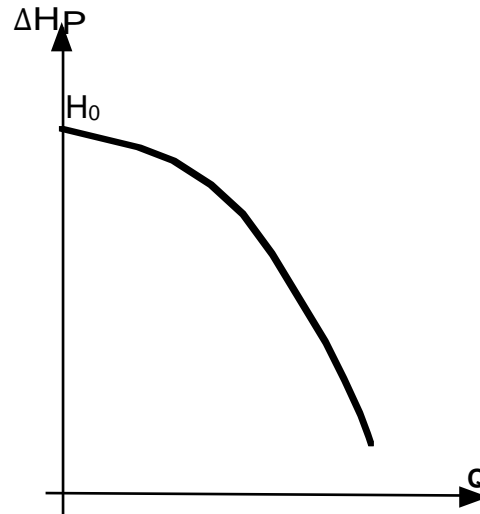


Fig. 7– Courbe de pompe.

La courbe caractéristique d'une pompe est l'interaction de deux variables qui en décrivent le comportement:

- HAUTEUR MANOMÉTRIQUE: l'énergie par unité de masse que la pompe parvient à fournir au fluide
- DÉBIT: la quantité de fluide qui traverse une section dans un certain laps de temps

Sur l'axe des ordonnées se trouve la hauteur manométrique, sur l'axe des abscisses le débit.

En général, on approxime la courbe de pompe par une fonction parabolique du type :

$$\Delta H_p = H_0 + BQ + CQ^2$$

En regroupant les longueurs de conduites si elles sont de mêmes diamètres, on écrit :

$$\Delta H = H_A - H_B = \frac{8fL}{\pi^2 g D^5} Q^2 - (H_0 + BQ + CQ^2) = RQ^2 - (H_0 + BQ + CQ^2)$$

En regroupant les facteurs, on obtient le polynôme quadratique suivant :

$$(R - C)Q^2 - BQ - (H_0 + H_A - H_B) = 0$$

dont la solution est :

$$Q = \frac{B \pm \sqrt{B^2 + 4(R - C)(H_0 + H_A - H_B)}}{2(R - C)}$$

Il faudra, bien entendu, choisir la solution physiquement acceptable, c'est-à-dire celle qui correspond à un point sur la courbe de pompe.

Principes de base du calcul de systèmes hydrauliques complexes

Des exemples précédents, on constate que :

- le débit entrant dans un réservoir est le même que celui qui en sort ainsi que celui qui coule dans la conduite qui relie les deux réservoirs;

- l'équilibre de l'écoulement, c'est-à-dire le régime permanent, est atteint lorsque la perte de charge devient égale à la charge hydraulique disponible.

La première constatation découle du principe de conservation de la masse pour un fluide incompressible, ce que nous appellerons un principe de continuité des débits.

La seconde constatation provient du principe général de conservation de l'énergie qui stipule que l'énergie perdue ou consommée doit être égale à l'énergie disponible.

Mise en situation

Nous verrons ici comment appliquer ces deux principes pour analyser des systèmes plus complexes que les précédents. Considérons le cas suivant :

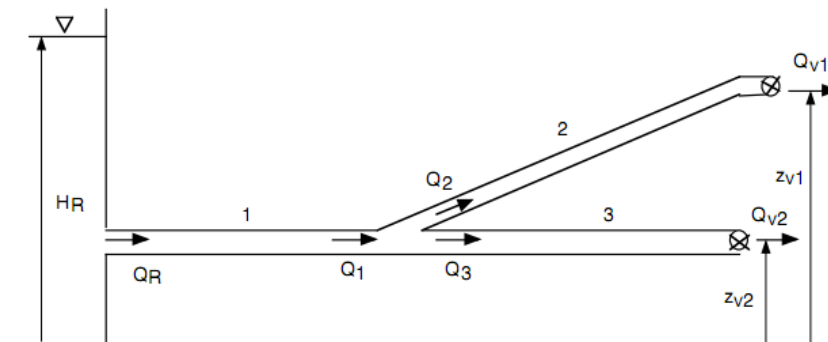


Fig. 8 – Écoulement en conduites vers deux vannes.

Examinons le principe de continuité; le débit sortant du réservoir se sépare en deux débits, pas nécessairement égaux, au niveau de la bifurcation. Comme il y a continuité des débits, il faut que :

$$Q_R = Q_{v1} + Q_{v2}$$

Ou encore : $Q_R - Q_{v1} - Q_{v2} = 0$

Nous avons ici trois inconnues car les débits vont dépendre de la hauteur d'eau dans le réservoir ainsi que des élévations des vannes.

Voyons le principe de conservation de l'énergie; en régime permanent, on doit avoir équilibre entre les pertes de charge et la charge disponible. En utilisant l'équation d'énergie de Bernoulli, écrivons deux relations entre le réservoir et les sorties aux vannes que nous considérerons ouvertes à 100% et en négligeant les pertes de charge locales :

$$\underbrace{\frac{P_R}{\gamma} + z_R}_{H_R} + \underbrace{\frac{V_R^2}{2g}}_0 = \underbrace{\frac{P_{v1}}{\gamma}}_0 + z_{v1} + \frac{V_{v1}^2}{2g} + \Delta H_{R1}$$

$$\underbrace{\frac{P_R}{\gamma} + z_R}_{H_R} + \underbrace{\frac{V_R^2}{2g}}_0 = \underbrace{\frac{P_{v2}}{\gamma}}_0 + z_{v2} + \frac{V_{v2}^2}{2g} + \Delta H_{R2}$$

où ΔH_{R1} et ΔH_{R2} sont les pertes de charges accumulées respectivement du réservoir jusqu'à la vanne 1 et du réservoir jusqu'à la vanne 2. En simplifiant on obtient :

$$H_R - z_{v1} = \frac{V_{v1}^2}{2g} + \Delta H_{R1}$$

$$H_R - z_{v2} = \frac{V_{v2}^2}{2g} + \Delta H_{R2}$$

Exprimons maintenant les termes d'énergie cinétique et les pertes en fonction des débits Q_1, Q_2 et Q_3 :

$$H_R - z_{v1} = \frac{8fL_1}{\pi^2 g D_1^5} Q_1^2 + \frac{8fL_2}{\pi^2 g D_2^5} Q_2^2 + \frac{8}{\pi^2 g D_2^4} Q_2^2$$

$$H_R - z_{v2} = \frac{8fL_1}{\pi^2 g D_1^5} Q_1^2 + \frac{8fL_3}{\pi^2 g D_3^5} Q_3^2 + \frac{8}{\pi^2 g D_3^4} Q_3^2$$

Finalement, en regroupant les facteurs de Q_1, Q_2 et Q_3 , on obtient :

$$H_R - z_{v1} = R_1 Q_1^2 + R_2 Q_2^2$$

$$H_R - z_{v2} = R_1 Q_1^2 + R_3 Q_3^2$$

Où

$$R_1 = \frac{8fL_1}{\pi^2 g D_1^5}, R_2 = \frac{8}{\pi^2 g D_2^4} \left(\frac{fL_2}{D_2} + 1 \right) \text{ et } R_3 = \frac{8}{\pi^2 g D_3^4} \left(\frac{fL_3}{D_3} + 1 \right)$$

De façon générale, les résistances R_i peuvent inclure, outre les effets du frottement sur la paroi de la conduite, les résistances causées localement et associées au débit Q_i , soit :

$$R_i = \frac{8}{\pi^2 g D_i^4} \left(\underbrace{1}_{\text{sortie à l'air libre}} + \underbrace{\sum C_L}_{\text{pertes locales}} + \underbrace{\frac{fL_i}{D_i}}_{\text{pertes par frottement}} \right)$$

Nous obtenons donc, grâce à l'application du principe de continuité des débits et de la conservation de l'énergie un système de trois équations à trois inconnues :

$$Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0$$

$$R_1 Q_1^2 + R_2 Q_2^2 = H_R - z_{v1}$$

$$R_1 Q_1^2 + R_3 Q_3^2 = H_R - z_{v2}$$

Ce système d'équations est non linéaire et il n'est pas possible de le résoudre tel quel. Pour obtenir une solution, il est nécessaire de le linéariser puis d'utiliser une méthode itérative.

Il est important ici de conserver le signe du débit en appliquant la relation suivante :

$$R_i Q_i^2 = R_i |Q_{0i}| Q_i$$

Les étapes de cette méthode sont :

1) Choisir une solution initiale Q_{0i} quelconque, soit ici Q_{01} , Q_{02} et Q_{03} .

2) Écrire le système linéarisé :

$$Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0$$

$$R_1 |Q_{01}| Q_1 + R_2 |Q_{02}| Q_2 = H_R - z_{v1}$$

$$R_1 |Q_{01}| Q_1 + R_3 |Q_{03}| Q_3 = H_R - z_{v2}$$

3) Résoudre pour trouver une estimation de Q_1 , Q_2 et Q_3 .

4) Calculer une norme de convergence, par exemple $|Q_i - Q_{0i}|$

5) Comparer la norme avec une précision acceptable, si elle est atteinte on arrête sinon on continue à l'étape suivante :

6) Calculer de nouvelles valeurs de Q_{01} , Q_{02} et Q_{03} en faisant la moyenne des valeurs des deux ensembles précédents : $Q_{0i} = (Q_{0i} + Q_i) / 2$

7) Retourner à l'étape 2)

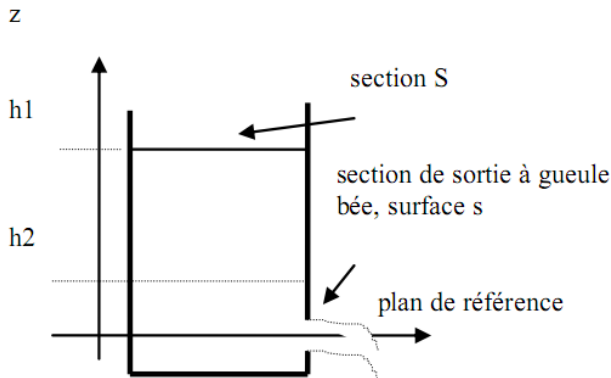
À partir de cet exemple, on constate que l'application de la continuité des débits et l'équilibre des pertes

de charge avec les différences de charge disponible permet de décrire complètement le comportement du système hydraulique sous pression.

Temps de vidange

Soit un Réservoir percé à la base. En supposant ne pas avoir de pertes de charge et en suivant une ligne de courant depuis un point à la surface du réservoir d'altitude z (vitesse V_1 , pression atmosphérique) jusqu'à un point au niveau de la section à gueule bée (vitesse V_2 , pression atmosphérique), on obtient la relation:

$$V_2 = \sqrt{2gz}$$



Par l'équation de continuité et en remarquant que l'on a: $V_1 = -\frac{dz}{dt}$, on obtient l'équation différentielle:

$$-\frac{dz}{dt} \cdot S = s \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot z} \Rightarrow \int_{h1}^{h2} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{s}{S} \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot t$$

On déduit de cette expression :

$$t = \frac{2 \cdot S \cdot (\sqrt{h1} - \sqrt{h2})}{s \cdot \sqrt{2 \cdot g}}$$

Cependant, il ne faut pas oublier qu'un orifice introduit des pertes de charge. Pour tenir compte de ces pertes, il est nécessaire d'augmenter le temps obtenu précédemment pour le cas idéal. On divise donc le temps précédent par le coefficient k de l'orifice ($k < 1$). k est appelé coefficient de contraction de l'orifice.

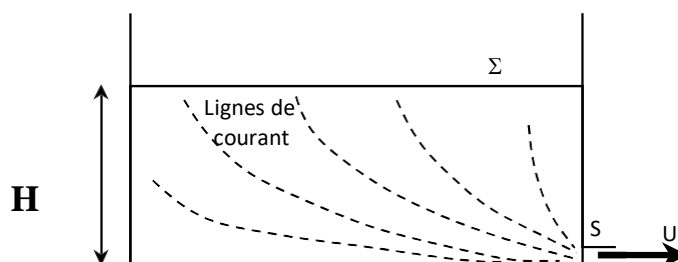
On déduit de ces équations le temps de vidange du réservoir:

$$t = \frac{2 \cdot S \cdot (\sqrt{h1} - \sqrt{h2})}{K \cdot S \cdot \sqrt{2 \cdot g}}$$

Vidange d'un réservoir

Formule de Torricelli :

En étudiant l'écoulement de l'eau par un orifice de surface S percé dans le bas d'une cuve, Torricelli observa que le jet sortait perpendiculairement à la surface S , avec un débit volumique $D_v(t)$ proportionnel à S et à la racine carrée de la hauteur d'eau $H(t)$ dans la cuve.



Comment interpréter ce résultat ? La conservation du débit donne :

$$D_v(t) = SU(t) = -\Sigma \frac{dH}{dt}$$

où $U(t)$ est la vitesse de sortie dans le jet et Σ la section de la cuve. Comme $S \ll \Sigma$, on en déduit

que $\left| \frac{dH}{dt} \right| \ll U$: on peut se placer en régime quasi-stationnaire en supposant $H \approx cste$ et utiliser

la relation de Bernoulli en régime permanent.

On se place sur une ligne de courant (voir figure). Le jet d'eau étant à l'air libre, sa pression est celle du gaz qui l'entoure, c'est-à-dire la pression atmosphérique P_0 . Il en est de même pour la surface libre dans la cuve. Le théorème de Bernoulli donne alors :

$$P_0 + \mu gH = P_0 + \frac{1}{2} \mu U^2$$

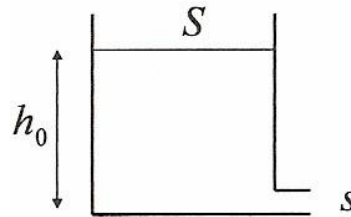
Par conséquent :

$$U = \sqrt{2gH}$$

On obtient une loi analogue à la loi de la chute libre dans le champ de pesanteur.

Ensuite, le jet suit une loi de chute libre avec la vitesse initiale U horizontale, d'où la forme parabolique du jet.

Exercice 1 : temps de vidange d'un réservoir :



La section de l'ouverture de vidange s est petite devant la surface libre S du liquide.

a) Montrer que cela permet de trouver simplement la vitesse d'éjection v_0 en fonction de h_0 ; commentaire. AN : Calculer v_0 pour $h_0 = 1$ m

b) Sous quelle hypothèse peut-on estimer le temps de vidange τ du réservoir ?

AN : Calculer τ pour $h_0 = 1$ m, $S = 0,5$ m² et $s = 1,5$ cm².

Le liquide considéré est un fluide parfait en écoulement incompressible.

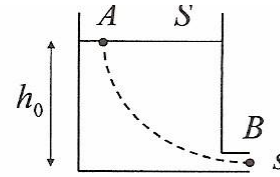
Solution :

de Bernoulli s'applique car le fluide est parfait (sans force autre), l'écoulement est incompressible et au début, stationnaire :

$$0 + gz_A + \frac{P_0}{\rho} = \frac{v_0^2}{2} + gz_B + \frac{P_0}{\rho} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh_0}$$

Il s'agit de la formule de Torricelli, identique à celle de la chute libre, car l'énergie cinétique est acquise au dépens de l'énergie potentielle de pesanteur.

- a) Soient A et B deux points sur une même ligne de courant pris respectivement sur la surface libre S et sur l'extrémité de la section d'ouverture s . À cause du rapport des surfaces, $s \ll S$, la conservation du débit massique $v_A S = v_B s$ conduit à $v_A \ll v_B$. Le théorème



AN : $v_0 = 4,43 \text{ m.s}^{-1}$

- b) Au cours du temps la hauteur d'eau h diminue et il en est de même de la vitesse d'éjection v_B et donc du débit $D_v = v_B s$. Supposer le régime quasi permanent à

tout instant revient à adapter la formule de Torricelli sous la forme $v(t) = \sqrt{2gh(t)}$ (c'est le même procédé qui est utilisé en électromagnétisme dans l'approximation des régimes quasi stationnaires).

La loi de vidange est : $v_B = \sqrt{2gh} = \frac{S}{s} v_A = -\frac{S}{s} \frac{dh}{dt}$ (1) $\Rightarrow -\frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{s}{S} \sqrt{2g} dt$

par intégration : $2(\sqrt{h_0} - \sqrt{h}) = \frac{s}{S} \sqrt{2g} t$ ou $v(t) = v_0 - \frac{s}{S} gt$ (fonction affine)

Le temps de vidange τ du réservoir s'obtient en traduisant $h(\tau) = 0$, soit

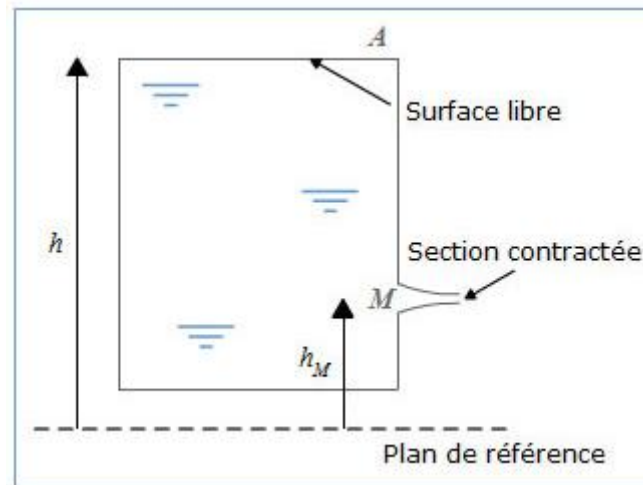
$$\tau = \frac{S}{s} \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

AN : $\tau \approx 1\,500 \text{ s} \approx 25 \text{ min}$

Exercice 2:

Soit un réservoir dont le fluide s'échappe par un orifice étroit. Le réservoir est assez grand pour que l'on néglige les variations de niveau de la surface libre pendant le temps Δt et que l'on puisse considérer le mouvement permanent. Le fluide est considéré comme parfait.

A la sortie, le jet présente une section contractée où les lignes de courant sont parallèles et pratiquement rectilignes.



Question

1 - Calculer la vitesse au point M à la sortie de l'orifice.

2 - Calculer le temps de vidange.

1- Appliquer la relation de Bernoulli entre le point A de la surface libre et le point M.

2 - Ecrire que le volume évacué pendant le temps Δt est égal à la diminution de volume dans le réservoir.

Solution

1 - Calculer la vitesse au point M à la sortie de l'orifice

Il existe une ligne de courant entre le point A situé à la surface libre et le point M dans la section de sortie, on peut donc appliquer la relation de Bernoulli entre ces deux points :

$$P_A + \rho g h_A + \rho \frac{V_A^2}{2} = P_M + \rho g h_M + \rho \frac{V_M^2}{2}$$

En considérant les conditions d'écoulement, on a : $P_A = P_M = P_{atm}$. En outre, comme la section du réservoir est grande par rapport à celle de l'orifice, la vitesse en A est négligeable par rapport à celle de M : $V_A = 0$ (il suffit d'appliquer la conservation du débit pour s'en rendre compte). En intégrant ces données dans l'équation, on obtient :

$$V = \sqrt{2g(h_A - h_M)} \text{ avec } h_A - h_M = z$$

D'où

$$V = \sqrt{2gz} \text{ Formule de Torricelli}$$

2 - Calculer le temps de vidange

On exprime que le volume évacué pendant le temps Δt est égal à la diminution de volume dans le réservoir soit :

Le volume évacué pendant le temps Δt est égal à : $qvdt$ où qv est le débit volumique.

La diminution de volume dans le réservoir est : $-Sdh$ où S est la section du réservoir et dh la variation de hauteur dans le réservoir pendant le temps.

Le débit volumique est égal à : $qv = ccVS_0$. Dans cette expression cc est le coefficient de contraction (la section du jet à la sortie est ccS_0 et V la vitesse du fluide au niveau de l'orifice.

L'égalité s'écrit :

$$c_c S_0 V dt = -S dh$$

On obtient :

$$dt = -\frac{S dz}{c_c S_0 V}$$

Soit en remplaçant V par sa valeur :

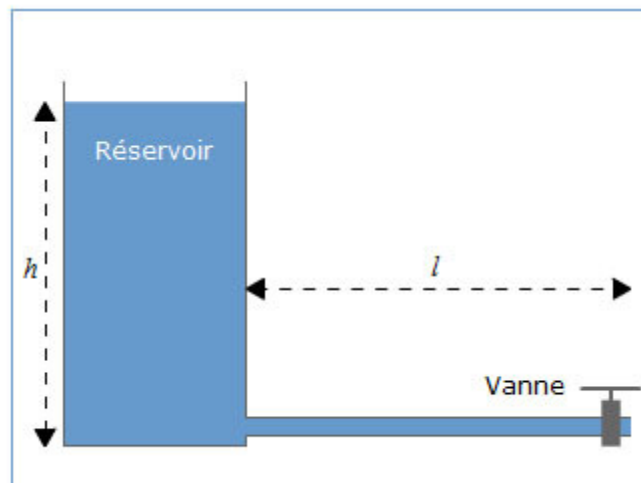
$$dt = -\frac{S}{c_c S_0 \sqrt{2g}} \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

Pour une vidange complète, l'intégration entre h_A et zéro donne :

$$t = \frac{S}{c_c S_0 \sqrt{2g}} \int_{h_A}^0 \frac{dz}{\sqrt{z}} \text{ soit } t = \frac{S}{c_c S_0 \sqrt{2g}} 2 \sqrt{h_A}$$

Exercice 3 :

On considère une conduite horizontale, de section constante, de longueur l , alimentée par un réservoir de grandes dimensions où le niveau est maintenu constant. A l'extrémité de la conduite, une vanne permet de réguler le débit. A l'instant $t = 0$, la vanne est fermée et on l'ouvre brutalement.



Question :

Etablir la relation entre le temps d'établissement de l'écoulement et la vitesse maximale du fluide.

1 - Utilisez la relation de Bernoulli en mouvement non permanent entre un point de la surface libre et un point à la sortie du tuyau.

2 - \vec{V} ne dépend que du temps, on a donc la formule suivante : $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{dV}{dt}$

Etablir la relation entre le temps d'établissement de l'écoulement et la vitesse maximale du fluide.

En un point à la distance x de O la relation de Bernoulli en régime non permanent s'écrit :

$$P_a + \rho gh = P + \rho \frac{V^2}{2} + \rho \frac{\partial V}{\partial t} x$$

La section du tuyau est constante donc V et $\frac{\partial V}{\partial t}$ ont la même valeur le long du tuyau.

En $x = l, P = P_a$, la relation précédente s'écrit donc :

$$\frac{\partial V}{\partial t} \frac{g}{l} \left(h - \frac{V^2}{2g} \right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{dV}{dt}$$

V ne dépend que du temps, on peut écrire $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{dV}{dt}$. L'équation devient donc :

$$dt = 2l \frac{dV}{2gh - V^2}$$

En intégrant, on obtient :

$$t = \frac{l}{\sqrt{2gh}} \ln \left(\frac{\sqrt{2gh} + V}{\sqrt{2gh} - V} \right)$$

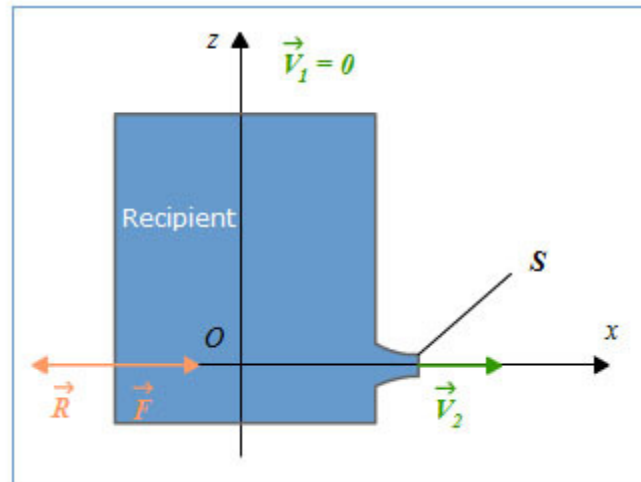
L'intégration précédente fait apparaître une constante, mais celle-ci est nulle car la vitesse est nulle à $t=0$.

Lorsque $t \rightarrow \infty; V = V_{max} = \sqrt{2gh}$, on se trouve dans le cas de l'écoulement permanent (formule de Torricelli), on peut donc écrire :

$$t = \frac{l}{V_{max}} \ln \left(\frac{1 + \frac{V}{V_{max}}}{1 - \frac{V}{V_{max}}} \right)$$

Exercice 4

On considère un récipient de grandes dimensions, percé d'un orifice d'où s'échappe un jet horizontal. On applique le théorème des quantités de mouvement au tube de courant (la surface de référence) limité par la surface libre du liquide, le récipient et le jet jusque la section contractée S .



Question

Calculer la poussée due au fluide sur le réservoir.

1 - On applique la relation d'Euler.

2 - Projetez cette relation sur les axes. Seule la projection sur Ox nous intéresse.

Calculer la poussée due au fluide sur le réservoir.

Appliquons le théorème d'Euler :

$$q_m(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = \vec{P} + \vec{F}$$

Projetons cette relation sur les axes de coordonnées :

Sur l'axe Ox le poids n'intervient pas : $F = q_m V_2$ avec $q_m = \rho S V_2$

Donc :

$$F = \rho S V_2^2$$

F est la résultante des forces de pression exercées par l'extérieur sur la surface. A l'inverse, le réservoir subit une poussée égale et opposée appelée réaction du jet :

$$R = -\rho S V_2^2$$

Avec la formule de Torricelli ($V_2^2 = 2gz$), on obtient :

$$R = -2\rho g z$$

(la réaction est indépendante du milieu qui entoure le réservoir).

LES MOUVEMENTS OSCILLATOIRES

Rappels

Le mot « onde » se rapporte à une « eau qui se déplace en se soulevant et en s'abaissant ». Il se traduit en anglais par « wave », mot de la même racine que « vague », pour désigner l'onde formée par le vent à la surface de la mer ou d'un lac. On est donc forcé de constater que, très tôt, le concept d'onde a émergé de l'observation du mouvement de la surface libre des océans, des lacs de barrages, des canaux et des cours. Ce sont en effet des ondes périodiques caractérisées par un mouvement de la surface de l'eau, de nature oscillatoire et qui se propage. La seule chose qui différencie ces phénomènes les uns des autres est l'échelle de temps c'est-à-dire la période T des oscillations. Il existe aussi des phénomènes qui, bien que non périodiques, appartiennent à la famille des ondes de surface : citons à titre d'exemple, le ressaut hydraulique, l'onde de crue, ... Par leur diversité, les ondes de surface sont suffisamment riches pour couvrir la plupart des phénomènes physiques ondulatoires : la réflexion, la réfraction, la diffraction, la dispersion... Une onde est caractérisée par :

- sa fréquence $f = 1/T$, où T est la période temporelle de l'onde, c'est-à-dire la durée qui sépare le passage de deux ondes consécutives ;
- sa période spatiale λ , ou longueur d'onde, distance qui sépare deux ondes consécutives.
- Son amplitude z_m On peut alors considérer la vitesse de propagation des ondes, ou célérité : $c = \lambda/T = \lambda \cdot f$. Si c dépend de la fréquence, on parle d'onde dispersive.

Coup de bélier hydraulique

Lorsque, dans une conduite, on fait varier brusquement le débit d'un liquide par une action quelconque (telle la fermeture d'une vanne, par exemple), un régime instationnaire apparaît dans le tronçon amont de la conduite. Ce régime est principalement caractérisé par la propagation d'ondes hydrauliques qui véhiculent une énergie élastique non négligeable (ondes de pression), suffisamment parfois pour apporter des dommages aux installations. Ces phénomènes sont assez courants (vous avez sans doute quelques fois remarqué qu'en fermant brutalement un robinet d'eau chez vous vous entendiez des tressautements dans les tuyaux), mais lorsqu'il s'agit de circuits destinés à l'alimentation de centrales hydrauliques (usines hydro-électriques notamment) produisant des centaines et des milliers de kilowatts, avec des débits d'écoulement très importants (plusieurs dizaines de mètres cubes par seconde), ces inconvénients doivent impérativement être évités. Une des techniques consiste à recourir à des dispositifs anti-bélier, parmi lesquels on notera les cheminées d'équilibre: celles-ci consistent à transformer les ondes de pression très énergétiques en oscillations en masse où l'énergie est amortie.

Cet article présente, moyennant quelques calculs d'hydraulique, le phénomène du coup de bélier et le principe des cheminées d'équilibre.

1- Définition du coup de bélier dans une conduite

Lorsque, dans une conduite, on fait varier brusquement le débit par une action quelconque, un régime instationnaire apparaît à l'extrémité aval de la conduite (on dit que l'on a affaire à un régime transitoire en charge). On observe, dans les expériences quotidiennes, les coups de bélier lorsque l'on ferme trop rapidement un circuit d'eau dans une habitation, accompagné d'un bruit de vibration bien caractéristique. La charge supplémentaire qu'apporte ce régime transitoire à la charge d'utilisation normale du circuit est largement supérieure à celle-ci; elle peut même conduire à des détériorations dans le circuit.

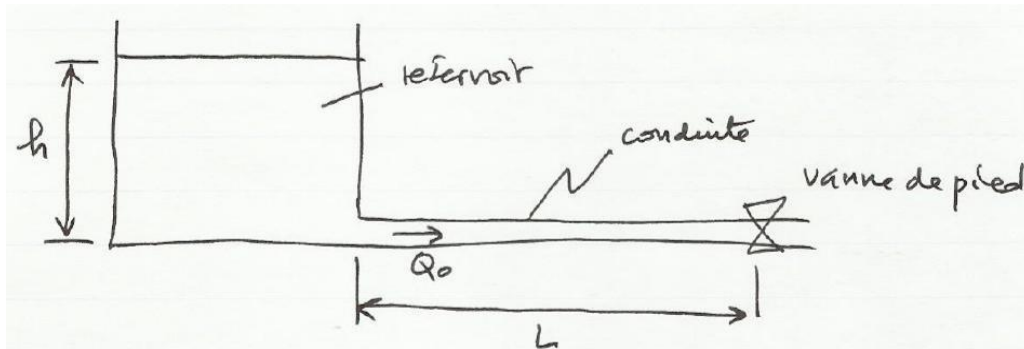


Figure 1 – dispositif simplifié favorable à l'apparition d'un coup de bélier

La **figure 1** illustre la configuration où apparaît le coup de bélier: un réservoir est relié à une conduite longue sur laquelle est montée une vanne. Lorsque la vanne est ouverte, un régime permanent de débit constant Q_0 est installé dans la conduite. Si l'on ferme rapidement la vanne, une surpression variable apparaît dans la conduite pendant une durée finie, génératrice d'ondes élastiques se propageant en elle.

Nous verrons que selon la vitesse avec laquelle la fermeture de la vanne est réalisée, on aura des régimes transitoires différents. Le paramètre important est le rapport :

$$\frac{\text{durée de la fermeture de la vanne}}{\text{durée d'aller-retour de l'onde dans le circuit}}$$

Si ce rapport est très faible (fermeture quasi-instantanée), la surpression dans le circuit atteint un maximum important par suite des interférences constructives entre les ondes aller et les ondes retour.

Si ce rapport est élevé (fermeture lente), la variation progressive du débit est analogue à une succession, en nombre infini, de fermetures partielles qui ont chacune pour effet de générer des surpressions qui se succèdent et qui sont différentes de la situation d'une fermeture instantanée,

ce qui conduit à une surpression globale moins importante que pour la fermeture instantanée.

Le premier cas (fermeture instantanée) fait l'objet du **modèle d'Allievi**, le second (fermeture progressive) fait l'objet du **modèle de Michaud**. Nous les étudierons par la suite.

2 – Définition de la cheminée d'équilibre, oscillations en masse

Une manière de réduire les surpressions dans une conduite consécutives à la fermeture d'une vanne de pied, consiste à transformer les ondes de pression dans la conduite par des oscillations en masse dans un dispositif connecté à la conduite. C'est la fonction de la cheminée d'équilibre: colonne verticale ouverte, avec une surface libre, connectée en dérivation à la conduite, en amont de la vanne de pied (**figure 2**).

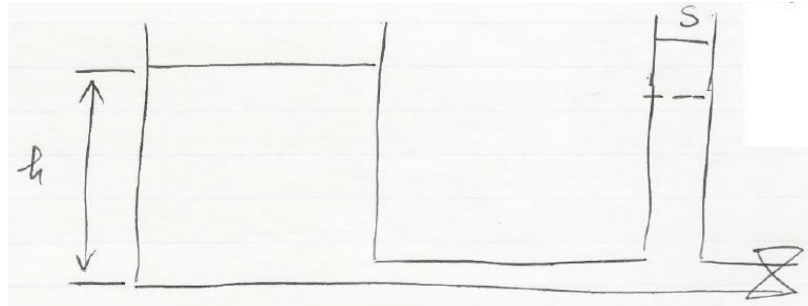


figure 2 – cheminée d'équilibre

Lorsque les ondes de surpression partent de la vanne de pied vers le réservoir, elles rencontrent une première surface libre au niveau de la cheminée d'équilibre et ne se propagent pas plus avant vers la retenue ou le réservoir. Leur énergie est transmise à la masse d'eau contenue dans la cheminée, et comme elle a une surface libre, cette masse va osciller également sous l'action de cette énergie et absorber ainsi les ondes de surpression de la conduite. Le phénomène est comparable à une oscillation dans un tube en U où l'une des branches est le réservoir et l'autre la cheminée.

Nous verrons que la cheminée joue un rôle d'amortissement des ondes de surpression si sa section est supérieure à une valeur minimale: c'est la **condition de Thoma**.

3 – Coup de bélier lors d'une fermeture instantanée: formule d'Allievi

3.1 - Description qualitative (Voir la figure 3).

La conduite, de longueur L , est supposée horizontale, de sorte que la variation de pression due à la pesanteur n'intervienne pas: la pression P est alors la même dans toute la conduite; elle est égale à la pression P_0 du régime permanent augmentée de la surpression ΔP due à la fermeture de la vanne de pied:

$$P = P_0 + \Delta P$$

La vitesse de l'eau dans la conduite est constante: U (m/s), car l'écoulement est permanent.

Les événements suivants se succèdent juste après la fermeture de la vanne de pied:

- L'instant initial $t = 0$ est celui où la fermeture instantanée est réalisée. Juste avant cet instant la vitesse V du fluide est U : $V = U$.
- A la fermeture $t = 0$, la vitesse V s'annule à la section correspondant à la vanne de pied, mais elle ne s'annule pas simultanément dans toutes les sections de la conduite.
- La vitesse V s'annule aux sections successives vers l'amont (i.e. vers le réservoir) avec une célérité c .

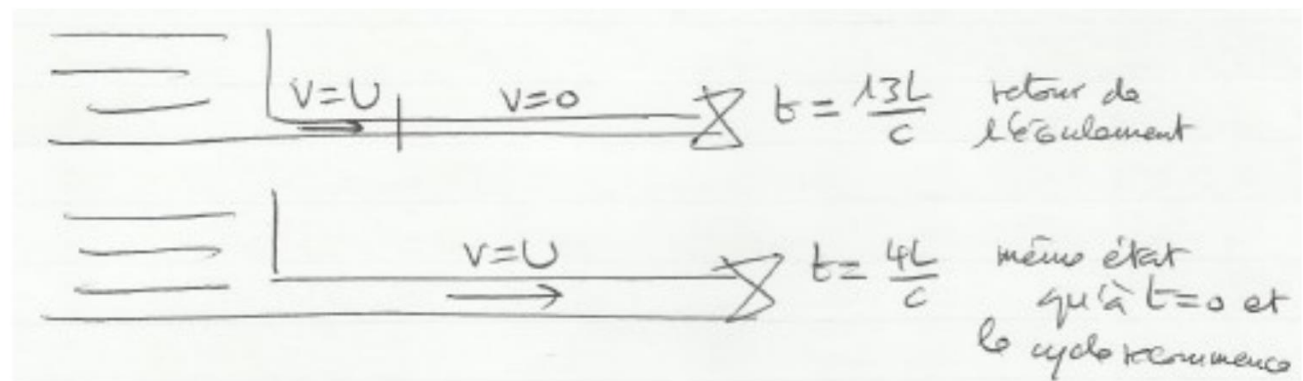
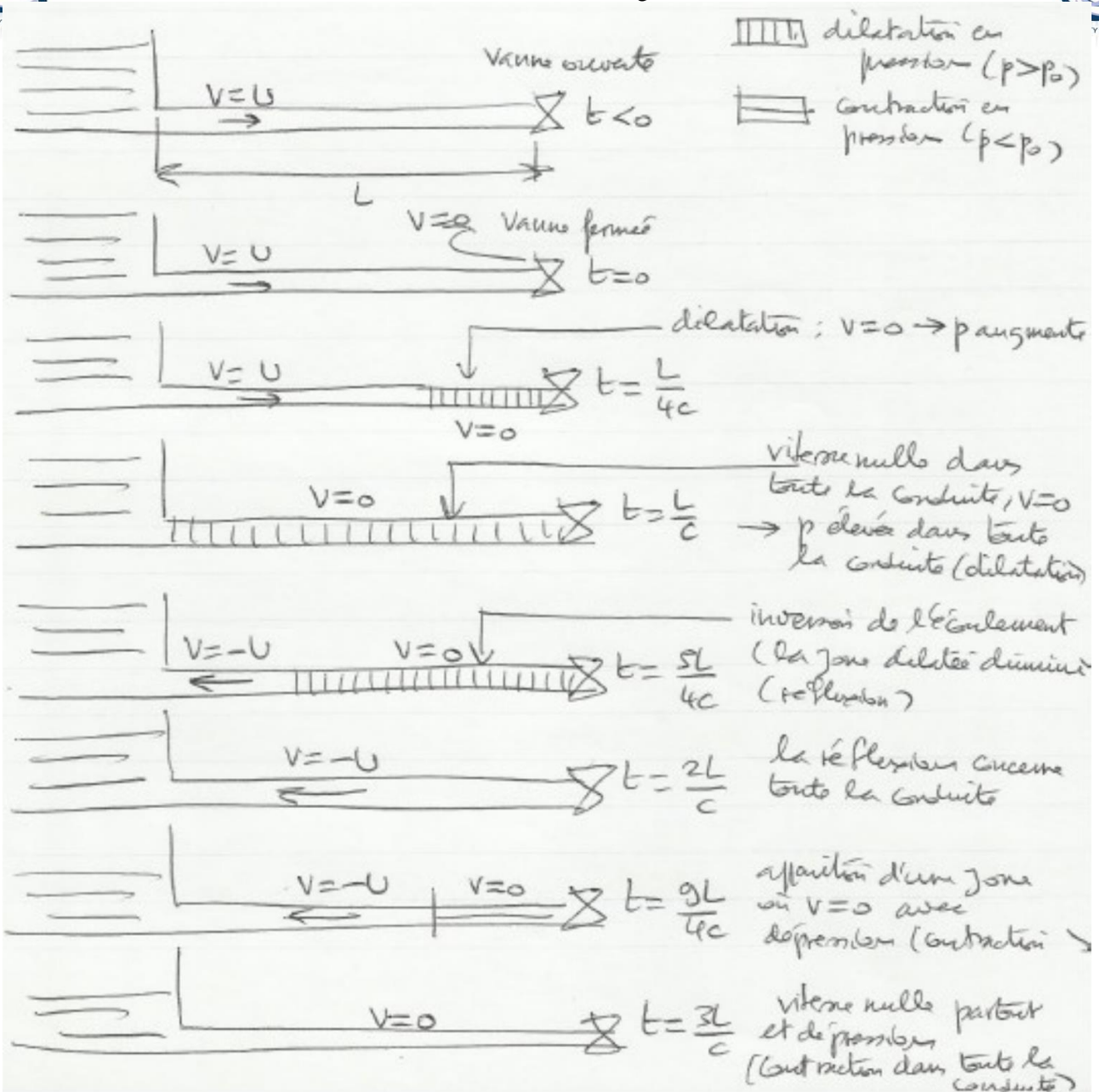


Figure 3 – coup de bélier dans une conduite: étapes successives du champ de vitesse après fermeture de la vanne de pied (c : vitesse de propagation de l'onde, c'est-à-dire vitesse avec laquelle se déplace le front qui sépare la zone où $V = U$ de celle où $V = 0$)

- Si s est une section où $V = 0$, entre s et la vanne de pied on a $V = 0$, mais entre s et le réservoir on a encore $V = U$.
- Entre s et la vanne de pied où $V = 0$, la pression augmente à cause de la conservation de l'énergie le long des lignes de courant (relation de Bernoulli). Cette augmentation de pression va s'emmagasiner d'une part dans la compression du volume d'eau dans le tronçon considéré, et d'autre part dans la dilatation élastique de la paroi de la conduite sur ce même tronçon. Tout se passe comme si l'ensemble (eau + conduite) se comporte comme un ressort comprimé sous l'action de la surpression d'une masse d'eau.
- A l'instant $t = L/c$, le front d'onde atteint la surface libre en amont (c'est-à-dire la surface libre du réservoir). A la surface libre, l'onde se réfléchit et change de signe, donc elle devient une onde de dépression qui retourne dans la conduite: l'eau circule en retour avec la vitesse $V = -U$.
- A $t = 2L/c$, donc après le temps L/c depuis la première réflexion, l'onde de dépression rencontre la vanne de pied (restée fermée), et s'y réfléchit sans changer de signe. La pression diminue alors dans la conduite (toujours selon la relation de Bernoulli) et l'onde de dépression se dirige vers l'amont (le réservoir).
- A $t = 3L/c$, cette onde de dépression se réfléchit à la surface libre du réservoir en changeant de signe, ce qui donne une onde de compression qui retourne vers l'aval (la vanne de pied).
- Et ainsi de suite. Ces alternances sont théoriquement infinies pour un fluide parfait, mais pour un fluide réel, les effets de frottement dus à la viscosité (pertes de charge) dissipent l'énergie et les ondes s'amortissent très rapidement.

3.2 - Surpression et célérité de l'onde d'un coup de bélier avec fermeture instantanée (relation d'Allievi)

Soit (s_0) la section au niveau de la vanne de pied.

L'onde se propage avec la célérité c , que nous allons calculer. Pendant la durée dt , cette onde parcourt la distance: $dx = c dt$, et rencontre la section (s) voisine de (s_0), distante de dx .

Si l'on désigne par s la surface de la section de la conduite, supposée constante, la masse d'eau contenue dans le tronçon (s_0s) est:

$$dm = \rho s dx = \rho s c dt$$

où ρ masse volumique de l'eau. Soit $V(x,t)$ la vitesse de l'eau dans la conduite au niveau de la section

(s). La masse dm a une impulsion $dp = d(mV)$ qu'elle acquiert sous l'action de la force due à la surpression ΔP : $F = s\Delta P$. Le principe fondamental de la dynamique donne:

$$\frac{dp}{dt} = F$$

Or :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mV) = \frac{dm}{dt}V + m \frac{dV}{dt}$$

La vitesse d'écoulement étant constante $V = U$, on a $dV/dt = 0$ et:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt}U = \rho c s U = s \Delta P$$

D'où la surpression en (s)

$$\Delta P = \rho c U \quad (1)$$

Par ailleurs, cette surpression s'obtient en appliquant le théorème de l'énergie: l'énergie cinétique de la masse d'eau est égale à la somme des travaux de compression de l'eau et de déformation de la conduite. La conduite est circulaire, de diamètre D . Une variation de pression ΔP à température constante entraîne dans le fluide une variation de volume:

$$\frac{\Delta v}{v} = \chi_T \Delta P$$

où χ_T coefficient de compressibilité de l'eau. Cette même variation ΔP entraîne une variation de l'épaisseur e de la conduite:

$$\frac{\Delta e}{e} = \frac{1}{E} \Delta P$$

Où E est le module de Young (Le module de Young, module d'élasticité ou module de traction est la constante qui relie la contrainte de traction et le début de la déformation d'un matériau élastique isotrope. le module de Young est homogène à une pression, ou plus précisément une contrainte mécanique qui engendrerait un allongement de 100 % de la longueur initiale d'un matériau (il doublerait donc de longueur), si l'on pouvait l'appliquer réellement : dans les faits, le matériau se déforme de façon permanente, ou se rompt, bien avant que cette valeur ne soit atteinte. Le module de Young est la pente initiale de la courbe de déformation-contrainte. L'unité internationale correspondante est donc le pascal (Pa). En

raison des valeurs élevées que prend ce module, il est en général exprimé en giga pascals (GPa) ou méga pascals (MPa.).

Il s'ensuit que le travail de compression est :

$$W_e = \frac{1}{2} \chi_T \Delta P^2 x s$$

Et le travail de déformation de la conduite est :

$$W_T = \frac{1}{2} \frac{\Delta P^2}{E e} D x s$$

L'énergie cinétique est, quant à elle :

$$\frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} \rho s x U^2$$

Et donc,

$$\frac{1}{2} \rho s x U^2 = W_e + W_T = \frac{1}{2} \Delta P^2 x s \left(\chi_T + \frac{D}{E e} \right)$$

D'où la surpression :

$$\Delta P = \frac{U}{\sqrt{\frac{1}{\rho} \left(\chi_T + \frac{D}{E e} \right)}} \quad (2)$$

Il est usuel d'exprimer ΔP en hauteur d'eau $H(m)$:

$$H(m) = \frac{\Delta P}{\rho g} = \frac{U}{\sqrt{\rho g^2 \left(\chi_T + \frac{D}{E e} \right)}} \quad (2a)$$

La comparaison de (2) et (1) donne la célérité de l'onde qui est la formule d'Allievi:

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \frac{D}{\chi_T E e}}} \quad (3)$$

Où

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\rho \chi_T}}$$

- la célérité du son dans l'eau.

AN: conduite en acier: $E = 20000 \text{ daN/mm}^2$ ($1 \text{ daN} = 10 \text{ Newton} = 1 \text{ Kgf}$), eau: $1/\chi_T = 20000 \text{ daN/cm}^2$.

Si $D = 2 \text{ m}$, $e = 2 \text{ cm}$, alors: $c = 1 \text{ km/s}$,

Si $U = 5 \text{ m/s}$, alors $\Delta P = 500 \text{ m}$ de hauteur d'eau (50 bars):

Un kilogramme-force représente la force due à la gravité par une masse de un kilogramme dans un champ gravitationnel de $9,81 \text{ m/s}^2$

3.3 - Surpression en cas d'une fermeture non instantanée (relation de Michaud)

Une vanne n'est jamais fermée sur une durée infiniment petite: l'opération de fermeture prend une durée finie T .

Pour modéliser le phénomène, on assimile la fermeture progressive de la vanne à une succession de n fermetures partielles instantanées, séparées les unes des autres d'une durée T/n . Au cours de chaque fermeture partielle la section de la conduite diminue de s/n (où s est la section initiale):

- La première fermeture partielle entraîne la propagation vers l'amont (le réservoir) d'une onde de surpression d'amplitude $\Delta P_1 = \Delta P/n$, où ΔP représente la surpression qu'aurait la conduite en cas de fermeture instantanée complète, donnée par (1): $\Delta P = \rho c U$

- L'onde de surpression se réfléchit avec changement de signe à la surface libre du réservoir au bout du temps L/c .
- Au bout du temps de retour, soit L/c , c'est-à-dire au bout du temps total $2L/c$ depuis la première

fermeture partielle, une onde de dépression atteint l'extrémité aval, c'est-à-dire la section (s_0) où se trouve la vanne de pied (cf. **figure 3**).

- En (s_0) l'onde de dépression, issue de la première fermeture partielle, se réfléchit vers l'amont sous forme d'une onde de dépression. Et c'est la même chose pour les autres ondes de dépression issues des fermetures partielles suivantes.
- Si la durée de fermeture est telle que $T > 2L/c$, la première onde de dépression d'amplitude $\Delta P_1 = \Delta P/n$ arrive sur la vanne (s_0) alors qu'elle n'est pas complètement fermée: cette onde se superpose alors à l'onde de surpression issue des fermetures partielles effectuées pendant la durée T . Il s'ensuit que la surpression dans les tronçons voisins de la vanne est plus petite que celle

- qu'aurait engendrée une fermeture instantanée. Nous verrons au paragraphe 3.4 que la surpression est égale à:

$$\Delta P = \rho \frac{2L}{T} U \quad (4)$$

C'est la **relation de Michaud**.

- Si $T < 2L/c$ (fermeture rapide quoique non instantanée), lorsque la première onde de dépression revient sur la vanne, celle-ci est déjà complètement fermée. En conséquence, la surpression ne peut pas diminuer par interférences destructives avec les autres ondes issues des fermetures partielles: elle conserve sa valeur maximale donnée par (1). Tout se passe comme si la fermeture était instantanée, cependant les effets d'élasticité de paroi en moins.

3.4 – Modélisation « localisée » de la propagation 1D dans la conduite: en fermeture instantanée et en fermeture lente

Comme dans tout phénomène ondulatoire, une modélisation localisée des propagations des grandeurs physiques est possible sous la condition qu'on se limite à l'hypothèse des grandes fréquences. La description « localisée » consiste à mettre en relation ces grandeurs entre deux points A et B du circuit, par l'intermédiaire d'une matrice où intervient l'impédance du circuit. Une **impédance** est le rapport entre une grandeur intensive (comme ici la pression P) et une grandeur extensive (comme ici le débit volumique Q_v):

$$Z = \frac{\Delta P}{Q} = \frac{\rho c U}{U s} = \frac{\rho c}{s}$$

d'après (1) la vanne de pied.

- En déduire ce qui se passe lors de la fermeture, selon qu'elle est lente ou rapide.
- Prévoir les phénomènes de résonance.
- Déduire la formule de Michaud pour la fermeture lente.

Pour cela, nous appliquons à un écoulement 1D les équations de Navier-Stokes (fluide visqueux) auxquelles on adjoindra les lois de comportement (ou équations d'état) du fluide et d'élasticité de la conduite:

(a)

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{V} \right) = \rho \vec{f} - \overrightarrow{grad} P + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

(b)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (\text{conservation de la masse})$$

(c) équation de compressibilité du fluide:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \chi_T dP$$

d) variation de la section s de la conduite sous la pression P :

$$\frac{ds}{s} = \frac{D}{Ee} dP$$

(D: diamètre, e: épaisseur du tuyau, E: module de Young)

Pour un écoulement unidirectionnel (1D), horizontal, suivant Ox ($\vec{V} = V \vec{e}_x$) les équations (a) et (b) se réécrivent:

$$(a \text{ bis}) \quad \rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

$$(b \text{ bis}) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + V \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

Compte tenu de (c): $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \chi_T \frac{\partial P}{\partial t}$ que l'on injecte dans (b bis); en introduisant la vitesse du son c_0

dans le fluide, telle que:

$$c_0^2 = \frac{1}{\rho \chi_T} \quad (5)$$

il vient pour (b bis):

$$\frac{\partial P}{\partial t} + V \frac{\partial P}{\partial x} + \rho c_0^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

On introduit la charge spécifique:

$$H_s = \frac{V^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} \quad \text{d'où} \quad \frac{dH_s}{dx} = \frac{1}{g} \left[V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \right]$$

Or la quantité:

$$\rho V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \rho V^2 + P \right) = \frac{\partial P^*}{\partial x} = \rho g \frac{dH_s}{dx}$$

ou P^* est la pression totale

$$P^* = \frac{1}{2} \rho V^2 + P$$

En première approximation, sur un parcours dans la conduite de longueur L , la quantité $\frac{\partial P^*}{\partial x}$

peut être assimilée à une variation de pression totale par unité de longueur:

$$\frac{\partial P^*}{\partial x} \approx \frac{\Delta P^*}{L}$$

La théorie et l'expérience montrent que sur une longueur L , les effets de frottement entraînent une diminution de la pression, ou perte de charge, qui dépend de L , du diamètre D de la conduite et de la rugosité de paroi h/D (h : hauteur moyenne des aspérités), selon une loi générale de perte de charge:

$$\frac{\Delta P^*}{L} = \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{1}{D} \Lambda \left(Re, \frac{h}{D} \right) \quad (7)$$

Où $\Lambda = \Lambda(Re, h/D)$ est le coefficient de perte de charge paramétré par le nombre de Reynolds

$$Re = \rho V D / \mu$$

et la rugosité ε/D , objet du **diagramme de Moody** (figure 4), réf. [1].

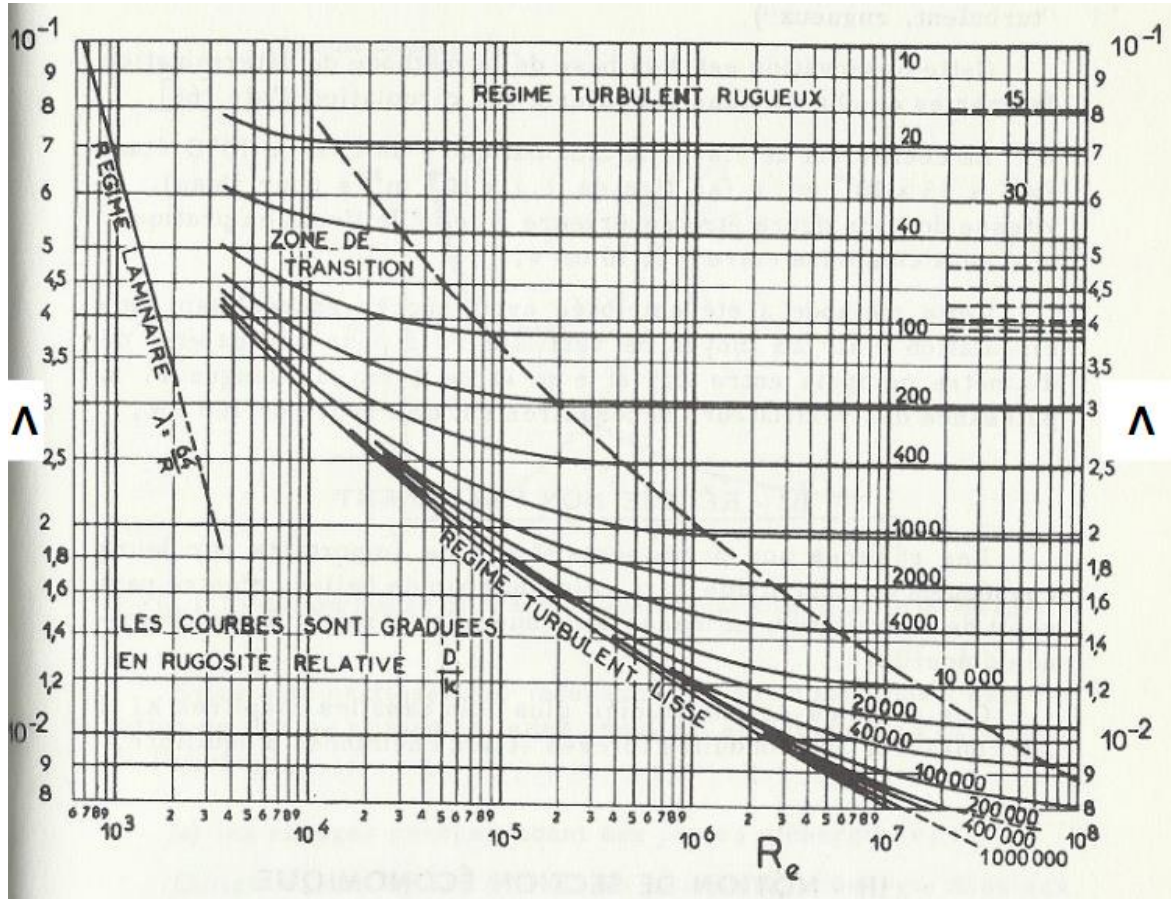


figure 4 – Diagramme de Moody

Quelques expressions de Λ :

- $Re < 2000$ (laminaire): $\Lambda = \frac{64}{Re}$
- $2000 < Re < 10^5$: $\Lambda = \frac{0,3164}{Re^{1/4}}$ (Blasius) régime turbulent lisse
- $10^5 < Re < 10^8$: $\Lambda = 0,0032 + \frac{0,221}{Re^{0,237}}$ (Nikuradse) régime turbulent lisse
- $Re = Re_c = 2000$ (critique): $\frac{1}{\Lambda} = \left[2 \ln \left(\sqrt{\Lambda} \frac{Re}{2,51} \right) \right]^2$ (Kirschmer-Prandtl-Karman)
- $Re > 2000$: $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} = -2 \ln \left(\frac{h}{3,7D} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\Lambda}} \right)$ (Colebrook) régime turbulent rugueux

(a bis) s'écrit alors:

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\rho V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

d'où:

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial P^*}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (8)$$

En stationnaire ($\partial V / \partial t = 0$) on aurait donc $\frac{\partial P^*}{\partial x} = \rho g \frac{\partial H_s}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ qui est égal à (7).
Le second membre de (8) est donc, en régime non stationnaire, le terme de perte de charge, donc :

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{1}{D} \Lambda (Re, h/D) \quad (9)$$

On dispose finalement des équations (6) et (9).

On néglige maintenant les pertes de charge et on introduit le débit $Q = sV$; (6) et (9) deviennent:

$$Q = sV$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + V \frac{\partial P}{\partial x} + \rho c_0^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

Or : $\frac{dQ}{dt} = s \left(\frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) = - \frac{s}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$ soit :

$$\frac{\rho}{s} \frac{dQ}{dt} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

Comme $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{s} \frac{\partial Q}{\partial x}$ on a aussi: $\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\rho}{s} V \frac{\partial Q}{\partial x} + \rho c_0^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0$

On néglige le terme de convection $V \partial Q / \partial x$ (linéarisation) d'où:

$$\frac{s}{\rho c_0^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

(10) et (11) sont ici les équations de base pour l'écoulement 1D dans la conduite horizontale, sans perte de charge. Pour une modélisation à constantes localisées, on introduit :

_ La capacité spécifique :

$$C_0 = \frac{s}{\rho c_0^2}$$

_ L'inertance spécifique:

$$L_0 = \frac{\rho}{s}$$

(L'**inertance** est une caractéristique acoustique permettant de définir certains phénomènes vibratoires concernant les structures. Elle indique la façon dont une structure réagit vibratoirement à la sollicitation d'un effort. Formellement, c'est le rapport de l'accélération que prend la masse sur

la force excitatrice en un point donné d'une structure, dans le domaine fréquentiel ; il s'exprime en $m \cdot s^{-2} \cdot N^{-1}$). Elle s'exprime en décibels

selon la relation suivante :

$$I(f) = 20 \cdot \log \left[\frac{\gamma(f)}{F(f)} \right] \quad (\text{en dB})$$

et les équations (10) et (11) se réécrivent comme les courants et les tensions dans un circuit électrique:

$$\begin{cases} L_0 \frac{dQ}{dt} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ C_0 \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Les fonctions P et Q ont pour transformées de Laplace \tilde{P} et \tilde{Q} avec par définition:

$$Q(x, t) = TL^{-1}(\tilde{Q}) = \int \tilde{Q}(x, u) e^{ut} du$$

$$P(x, t) = TL^{-1}(\tilde{P}) = \int \tilde{P}(x, u) e^{ut} du$$

ce qui donne:

$$\begin{cases} L_0 u \tilde{Q} + \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} = 0 \\ C_0 u \tilde{P} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$\tilde{P} = -\frac{1}{C_0 u} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} \rightarrow L_0 u \tilde{Q} - \frac{1}{C_0 u} \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial x^2} = 0$$

Ce qui donne l'équation d'onde pour le débit :

$$\frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial x^2} - L_0 C_0 u^2 \tilde{Q} = 0 \quad (13\text{bis})$$

(13bis) s'intègre pour \tilde{Q} , et de manière analogue pour \tilde{P} , en :

$$\begin{cases} \tilde{Q}(x) = a \cosh(u \sqrt{L_0 C_0} x) + b \sinh(u \sqrt{L_0 C_0} x) \\ \tilde{P}(x) = a' \cosh(u \sqrt{L_0 C_0} x) + b' \sinh(u \sqrt{L_0 C_0} x) \end{cases} \quad (14)$$

Déterminons les coefficients a, b, a', b' de (14). Pour cela, appliquons les équations (14) aux points A et B, où B correspond à l'entrée de la conduite (x = 0), et A correspond à la vanne de pied (x = L); les équations (13), compte tenu de (14), permettent de relier la pression et le débit par l'intermédiaire de

l'impédance $Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$: en posant $K = u \sqrt{L_0 C_0}$ il vient:

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(x) &= a \cosh Kx + b \sinh Kx \\ \tilde{P}(x) &= -Z_0 b \cosh Kx - Z_0 a \sinh Kx\end{aligned}$$

En x = 0 les égalités précédentes donnent:

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(0) &= a \\ \tilde{P}(0) &= -Z_0 b\end{aligned}$$

Or (13) donne aussi en x = 0:

$$\begin{aligned}L_0 u \tilde{Q}(0) + \frac{\partial \tilde{P}(0)}{\partial x} &= L_0 u a + b' K = 0 \\ C_0 u \tilde{P}(0) + \frac{\partial \tilde{Q}(0)}{\partial x} &= C_0 u a' + b K = 0\end{aligned}$$

Comme $a = \tilde{Q}(0)$ et $b = -\frac{\tilde{P}(0)}{Z_0}$ les coefficients a' e b' peuvent aussi s'exprimer à l'aide de $\tilde{P}(0), \tilde{Q}(0)$:

$$\begin{aligned}b' &= -\frac{L_0 u}{K} a = -\frac{L_0 u}{u \sqrt{L_0 C_0}} a = -Z_0 a = -Z_0 \tilde{Q}(0) \\ a' &= -\frac{K}{C_0 u} b = -\frac{u \sqrt{L_0 C_0}}{C_0 u} b = -Z_0 b = \tilde{P}(0)\end{aligned}$$

En remplaçant dans (14), on a pour tout x:

$$\begin{aligned}\tilde{P}(x) &= \tilde{P}(0) \cosh Kx - Z_0 \tilde{Q}(0) \sinh Kx & (14\text{bis}) \\ \tilde{Q}(x) &= -\frac{\tilde{P}(0)}{Z_0} \sinh Kx + \tilde{Q}(0) \cosh Kx\end{aligned}$$

En exprimant (14 bis) en x = L (vanne), on obtient en particulier la relation entre les grandeurs d'entrée (x = 0) et celles au niveau de la vanne:

$$\tilde{P}(L) = (\cosh KL) \tilde{P}(0) - Z_0 (\sinh KL) \tilde{Q}(0) \quad (15)$$

$$\tilde{Q}(L) = -\frac{1}{Z_0} (\sinh KL) \tilde{P}(0) + (\cosh KL) \tilde{Q}(0)$$

que l'on peut représenter sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} \tilde{P}(L) \\ \tilde{Q}(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(u\sqrt{L_0 C_0} L) & -Z_0 \sinh(u\sqrt{L_0 C_0} L) \\ -\frac{1}{Z_0} \sinh(u\sqrt{L_0 C_0} L) & \cosh(u\sqrt{L_0 C_0} L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{P}(0) \\ \tilde{Q}(0) \end{pmatrix} \quad (15\text{bis})$$

Si l'on assimile le tronçon de conduite entre l'entrée $x = 0$ (point B) et la vanne $x = L$ (point A) à un circuit équivalent électrique, où la pression P correspond à la tension, et le débit Q correspond au courant, la matrice de la relation (15 bis) est la matrice de transfert $[T]$ d'un quadripôle dont l'entrée est B et la sortie est A; on peut même vérifier que l'on peut représenter la relation entre l'état hydrodynamique d'une section A et celui d'une section B de la conduite par un quadripôle en « T », où les tensions V_2 et V_1 jouent le rôle respectivement de $P(A)$ et $P(B)$, et les courants i_2 et i_1 jouent le rôle respectivement de $Q(A)$ et $Q(B)$ (**figure 5**).

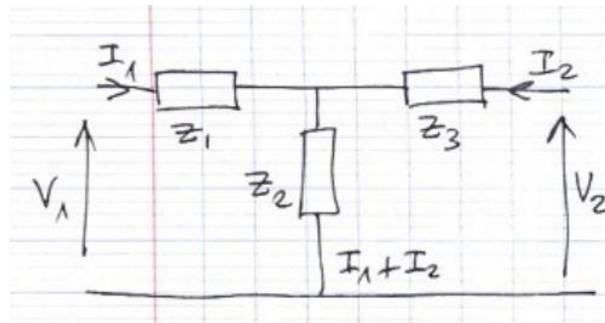


figure 5 – représentation par un quadripôle en T du tronçon de la conduite entre l'entrée 1 et la vanne 2

La relation de transfert entre les sections 1 (entrée B, $x = 0$) et 2 (vanne A, $x = L$) s'exprime par:

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = [T] \begin{pmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{pmatrix}$$

(avec les conventions de signes sur le sens des courants), où l'on montre que la matrice de transfert s'exprime à l'aide des impédances Z_1, Z_2, Z_3 par:

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \quad \text{avec:} \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{11} = 1 + \frac{Z_3}{Z_2} \\ T_{12} = Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2} \\ T_{21} = \frac{1}{Z_2} \\ T_{22} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2} \end{array} \right.$$

Les impédances sont déterminées en comparant les T_{ij} avec les éléments de la matrice de (15 bis),

compte tenu de la correspondance $V_2 \equiv P L$, $V_1 \equiv P 0$, $I_2 \equiv Q L$, $I_1 \equiv Q 0$:

$$\left. \begin{aligned} T_{11} &= 1 + \frac{Z_3}{Z_2} = \cosh(K L) \\ T_{12} &= Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2} = -Z_0 \sinh(K L) \\ T_{21} &= \frac{1}{Z_2} = -\frac{1}{Z_0} \sinh(K L) \\ T_{22} &= 1 + \frac{Z_1}{Z_2} = \cosh(K L) = T_{11} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} Z_2 &= -\frac{Z_0}{\sinh(K L)} \\ Z_3 &= -Z_0 \frac{\cosh(K L) - 1}{\sinh(K L)} \\ Z_1 &= -Z_0 \frac{\cosh(K L) - 1}{\sinh(K L)} = Z_3 \end{aligned} \right.$$

Et l'on vérifie que les impédances Z_1 , Z_2 , Z_3 satisfont bien la deuxième relation:

$$T_{12} = Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2} = -Z_0 \sinh(K L)$$

On peut maintenant déduire la valeur de l'impédance mécanique du circuit à la section A (vanne) à partir des valeurs des impédances Z_1 , Z_2 , Z_3 ci-dessus, qui interviennent dans le quadripôle en T. Pour cela on considère le circuit fermé en B (ce qui revient à poser $V_1 = 0$, c'est-à-dire pression $P(B) = 0$), le circuit de la **figure 5** devient alors celui de la **figure 5bis**:

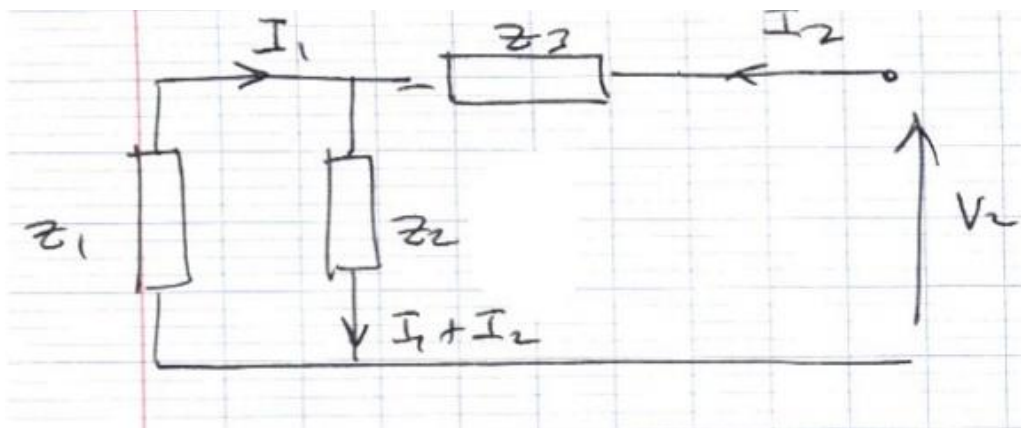


figure 5bis – calcul de l'impédance en 2 circuit fermé en 1

On a donc, d'une part: $V_2 = Z_3 I_2 - Z_2 I_1 - I_2$ et d'autre part: $Z_1 I_1 = -Z_2 I_1 - I_2$ donc:

$$I_1 = -\frac{Z_2}{Z_1+Z_2} I_2 \quad \text{d'où} \quad V_2 = \left(Z_3 + Z_2 - \frac{Z_2^2}{Z_1+Z_2} \right) I_2 = Z_A I_2$$

est l'impédance cherchée. En remplaçant Z_1, Z_2, Z_3 par leurs valeurs, on trouve:

$$Z_A = -Z_0 \tanh(u \sqrt{L_0 C_0} L) \quad (16)$$

La vitesse de fermeture de la vanne a des conséquences sur l'impédance mécanique du circuit en A (vanne). En effet, (16) prend les expressions approchées suivantes lorsque:

– la fermeture est lente: $u \ll 1 \rightarrow$

$$Z_A \approx -Z_0 u \sqrt{L_0 C_0} L = -L_0 u L \quad \text{soit :}$$

$$Z_A \approx -\rho \frac{L}{s} u \quad (17)$$

– la fermeture est rapide: $u \gg 1 \rightarrow$

$$Z_A \approx -Z_0$$

soit::

$$Z_A \approx -\rho \frac{c_0}{s} \quad (18)$$

L'expression de l'impédance mécanique au niveau de la vanne (16) permet d'autre part de prédire les conditions de résonance dans le circuit due à la fermeture, et les trépidations du circuit sont les effets de cette résonance. Jusqu'à présent, rien n'a été supposé pour la variable conjuguée du temps u qui intervient dans la transformée de Laplace. En supposant maintenant que les perturbations du circuit dues à la fermeture sont harmoniques, on a: $u = -j\omega$ (où ω est la pulsation, $\omega = 2\pi f$ où f est la fréquence).

Alors:

$$Z_A \approx j \left(\rho \frac{L}{s} \right) \omega$$

- en fermeture lente, (17) devient: ; l'impédance mécanique Z_A est donc de type inertielle (c'est-à-dire proportionnelle à $j\omega$: $Z_A = Mj\omega$, où M joue le rôle d'une inertie, c'est-à-dire une masse linéique $M = \rho L/s$);
- dans le cas général, (16) s'écrit, en régime harmonique (puisque: $-\tanh(j\omega) = j \tan(\omega)$):

$$Z_A = j Z_0 \tan(\omega \sqrt{L_0 C_0} L)$$

Ce qui montre que le débit $Q(A)$ et la pression $P(A)$ sont toujours en quadrature. La **résonance** $Z_A = \infty$ (intensité de pression très élevée) a lieu pour les modes de vibration tels que:

$$\omega \sqrt{L_0 C_0} L = \frac{\omega}{c_0} L = (2n+1) \frac{\pi}{2}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Ainsi, les résonances sont favorisées pour les tronçons de circuits longs, entre l'entrée et la vanne, et les perturbations à basses fréquences apparaissent plus facilement (et elles sont plus gênantes car moins vite atténuées) que pour les circuits courts.

Reste à évaluer la surpression dans le circuit engendrée par la fermeture de la vanne. Pour cela, on utilise l'équation (10) à laquelle on donne une expression approchée: si Δt est la durée avec laquelle la fermeture se produit, et en supposant une loi de fermeture linéaire,

$\frac{dQ}{dt} \approx -\frac{Q_0}{\Delta t}$ (10) devient approximativement:

$$-\frac{\rho}{s} \frac{Q_0}{\Delta t} + \frac{P-P_0}{x} \approx 0$$

La surpression $\Delta P = P - P_0$ s'écrit donc:

$$\Delta P = \rho x \frac{Q_0}{s \Delta t}$$

Or $Q_0 = s U_0$ donc :

$$P(x) = P_0 + \rho x \frac{U_0}{\Delta t}$$

La pression est maximale en $x = L$ (vanne):

$$P_{max} = P_0 + \rho L \frac{U_0}{\Delta t} \quad (19)$$

Ceci montre qu'un temps de fermeture quasi-nul (fermeture instantanée), $\Delta t \rightarrow 0$, entraîne une pression maximale très importante: les effets d'élasticité des parois de la conduite interviennent, ce qui conduit à la **formule d'Allievi** (3) vue au § 3.2.

Un temps de fermeture fini, $\Delta t > 0$, conduit à une valeur beaucoup plus faible de P_{max} , et la surpression se déduit de (19) selon la **relation de Michaud** (4):

$$\Delta P = \rho \frac{2L}{\Delta t} U_0 \quad (20)$$

Le facteur 2 provient du fait que l'onde de compression a le temps de faire un aller-retour lors d'une fermeture lente: L est remplacé par $2L$.

4 – Cheminée d'équilibre, régime d'oscillations en masse

Pour réduire les contraintes importantes qu'apporte aux structures les coups de bélier lors de variations plus ou moins brusques du débit d'écoulement dans une conduite, on installe au plus près de la vanne de fermeture une cheminée à surface libre destinée à absorber les ondes élastiques qu'elles convertissent en oscillations en masse du liquide présent dans la cheminée et au contact de la conduite. Pour modéliser les oscillations en masse dans une cheminée d'équilibre, on adopte les hypothèses suivantes, avec les notations de la **figure 6**:

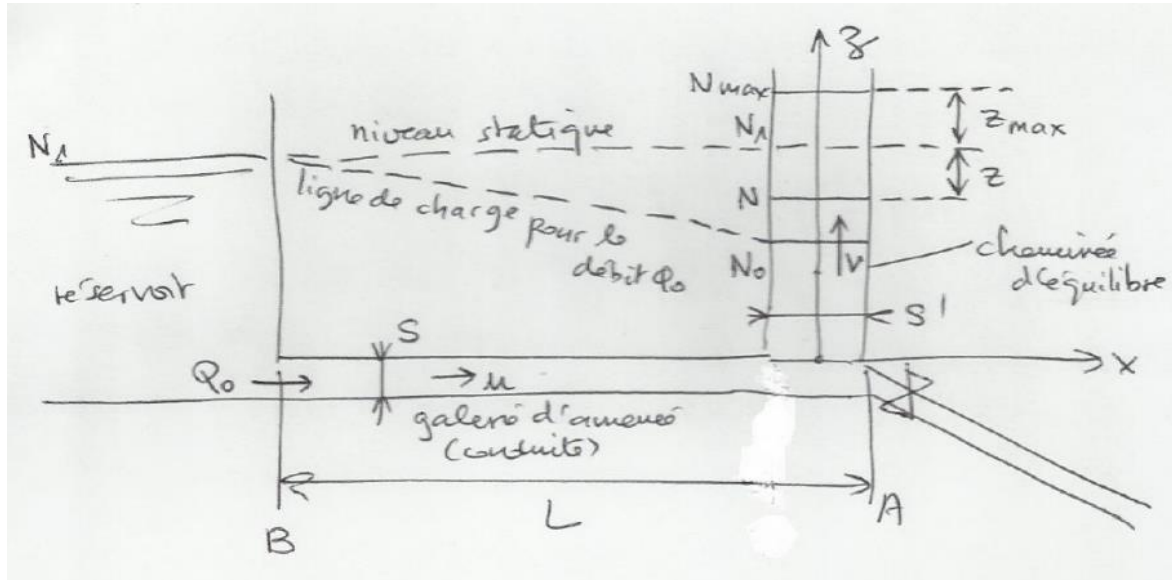


figure 6 – schéma de principe d'une cheminée d'équilibre

- a vanne de fermeture est pratiquement située en A;
- à la fermeture de A, l'eau en écoulement dans la conduite a pour seule issue la cheminée, et lorsqu'elle s'y engage, elle a pour effet de faire monter le niveau depuis N_0 jusqu'au niveau N , de cote z ;
- le niveau initial de la cheminée N_0 correspond à la ligne de charge associée au débit Q_0 depuis l'entrée B de la galerie et qui se réduit le long de celle-ci par suite des pertes de charge;
- le niveau maximum atteint dans la cheminée est N_{max} , de cote z_{max} ;
- le niveau N_1 dans la cheminée correspond au niveau sans perte de charge, donc il est le même que celui de la surface libre du réservoir;
- le niveau maximum z_{max} est calculé en disant que l'énergie potentielle de la tranche N_0N_{max} est égale à l'énergie cinétique de l'eau dans la conduite au moment de la fermeture de la vanne A;
- lorsque N_{max} est atteint, l'énergie potentielle se convertit en énergie cinétique et l'eau dans le tronçon N_0N_{max} redescend vers la conduite, et le cycle recommence;
- il en résulte que l'ensemble réservoir + conduite + cheminée est soumis à des oscillations en masse du liquide, à la façon de ce que l'on observe dans un tube en U.

On note:

- s et s' sections de la conduite et de la cheminée, toutes deux invariables;
- $L = AB$ longueur de la conduite;

- u et $v = dz/dt$ vitesses moyennes dans la conduite et dans la cheminée;
Dans un premier temps, **on néglige les pertes de charge**, donc $N_0 = N_1$.

On verra à la fin les équations générales avec prise en compte des pertes de charge.

- La variation de pression P dans une section de la conduite est égale à la variation de pression hydrostatique dans la cheminée due au dénivelé z . Dans la conduite, un tronçon AB d'eau est donc soumis à la force de poussée:

$$F = -P s = -\rho g z s$$

- L'accélération de la masse d'eau m contenue dans le tronçon est donc donnée par le principe fondamental de la dynamique:

$$m \frac{du}{dt} = F$$

Or $m = s L$

d'où :

$$\frac{L}{g} \frac{du}{dt} + z = 0$$

- La conservation du débit volumique Q entre la conduite et la cheminée (équation de continuité)

$$Q = s u = s' v = s' \frac{dz}{dt}$$

S'exprime par: en remplaçant dans l'équation précédente, celle-ci donne l'équation du mouvement pour z dans la cheminée:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{g}{L} \frac{s}{s'} z = 0 \quad (21)$$

La colonne d'eau oscille donc comme un oscillateur harmonique de période:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g} \frac{s'}{s}} \quad (22)$$

Et d'amplitude z_{\max} constante que nous déterminons par le théorème de l'énergie cinétique comme annoncé auparavant:

- Énergie potentielle de la colonne d'eau entre N_0 et N_{\max}

$$E_p = \int_0^{z_{\max}} \rho dV g z$$

où dV volume élémentaire d'un tronçon d'épaisseur dz : $dV = s' dz$, d'où

$$E_p = \frac{1}{2} \rho s' z_{\max}^2$$

- Énergie cinétique du tronçon AB:

$$E_c = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} \rho s L u^2$$

à l'instant de la fermeture $u = U_0$ vitesse constante dans la conduite, d'où:

$$E_p = E_c \rightarrow \frac{1}{2} \rho s' z_{max}^2 = \frac{1}{2} \rho s L U_0^2$$

d'où l'amplitude des oscillations en masse dans la cheminée d'équilibre:

$$z_{max} = U_0 \sqrt{\frac{L s}{g s'}} \quad (23)$$

Remarque: en comparant (22) et (23) on voit que:

$$z_{max} = \frac{U_0 T}{2\pi} = \frac{U_0}{\omega} \quad (24)$$

La relation (24) montre que si z_{max} et U_0 sont connues, la fréquence d'oscillation $f = \omega/2\pi$ s'en déduit.

La période d'oscillation et l'amplitude varient en sens inverse: une cheminée d'équilibre large a une période grande et une amplitude faible, et l'on cherchera à avoir s' beaucoup plus grand que s .

Application numérique:

$L = 10$ km (conduite forcée)

$s = 10$ m²

$s' = 100$ m² ($s'/s = 10$)

$U_0 = 2$ m/s (75 km/h)

on obtient: $T = 10$ mn, $z_{max} = 20$ m.

La période d'oscillation T est de l'ordre de plusieurs minutes pour les cheminées d'équilibre employées dans les ouvrages d'installations hydro-électriques (barrages) tandis que les périodes des coups de bélier sont de l'ordre de quelques secondes. En effet, en ordre de grandeur la célérité dans l'eau est:

$$c_0 \approx \frac{1}{\sqrt{\rho \chi_T}}$$

et la longueur d'onde de l'ordre de L d'où une période du coup de bélier

$$T' \approx L/c = L \sqrt{\rho \chi_T};$$

A.N.: $\rho = 1000$ kg/m³, $1/\chi_T = 2.10_9$ Pa, $L = 10000$ m $\rightarrow T = 7$ secondes.

Ces différences de valeurs pour les périodes d'oscillation en masse et du coup de bélier justifient le fait d'avoir considéré les deux phénomènes séparément.

Les cheminées d'équilibre sont donc des ouvrages assez imposants (voir photos ci-après).

La **prise en compte des pertes de charge** pour prédire les oscillations dans la cheminée d'équilibre est un peu plus compliquée.

D'après la relation (7), et en utilisant la charge spécifique:

$$H_s = \frac{\Delta P^*}{\rho g}$$

Il vient:

- perte de charge dans la conduite:

$$\frac{\Delta P_1^*}{\rho g} = H_{s1} = \frac{u^2}{2g} \frac{L}{D} \Lambda_1 \left(Re_1, \frac{h_1}{D} \right)$$

où l'indice 1 se rapporte à la conduite (D: diamètre);

- perte de charge dans la cheminée:

$$\frac{\Delta P_2^*}{\rho g} = H_{s2} = \frac{v^2}{2g} \frac{L'}{D'} \Lambda_2 \left(Re_2, \frac{h_2}{D'} \right)$$

où l'indice 2 se rapporte à la cheminée (D': diamètre, L': longueur) et $v = dz/dt$.

- L'équation (21) doit alors être remplacée pour tenir compte de ces forces de frottement:

$$\rho s L \frac{du}{dt} = -\rho g z s + \Delta P_1^* s + \Delta P_2^* s'$$

$$\frac{s L}{g} \frac{du}{dt} = -z s + H_{s1} s + H_{s2} s'$$

$$\frac{L}{g} \frac{du}{dt} + z - H_{s1} - \left(\frac{s'}{s} \right) H_{s2} = 0$$

à laquelle on adjoint l'équation de continuité modifiée par la présence d'un débit résiduel dû à l'action des turbines Q_R :

$$s u = s' \frac{dz}{dt} + Q_R \quad \text{soit:} \quad u = \frac{s'}{s} \frac{dz}{dt} + \frac{Q_R}{s}$$

Finalement l'équation différentielle du mouvement de la surface libre dans la cheminée, $z(t)$, est non linéaire dont la résolution est difficile en général:

$$\frac{L}{g} \frac{s'}{s} \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{s} \frac{L}{g} \frac{dQ_R}{dt} + z - \frac{u^2}{2g} \frac{L}{D} \Lambda_1 - \frac{1}{2g} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \frac{L'}{D'} \Lambda_2 = 0$$

$$u = \frac{s'}{s} \frac{dz}{dt} + \frac{Q_R}{s}$$

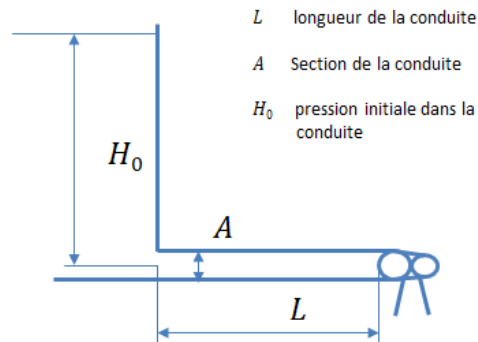
(25)

L'effet d'une variation d'ouverture sur les conditions hydrauliques - Cas 1, le coup de bélier de masse

Le coup de bélier de masse

Supposons une conduite forcée infiniment rigide et le fluide incompressible. C'est le cas des conduites courtes et les temps de manœuvre rapides par rapport au temps d'aller retour de l'onde. Lors d'une manœuvre qui fait varier le débit, on est en présence d'un coup de bélier de masse.

- Appliquons la loi de Newton à la variation de la quantité de mouvement de l'eau dans une conduite lors d'une manœuvre de coupure de débit.
- Au point de coupure, la variation de la quantité de mouvement crée une variation de pression dans le sens inverse :



Le coup de bélier de masse

$$m = \rho AL$$

$$m \frac{dV}{dt} = -\Delta p A = -\rho g \Delta H A$$

En sachant que : $m = \rho LA$

On obtient :

$$\Delta H = \frac{-L}{g} \frac{dV}{dt}$$

$m \rightarrow$ est le scalaire masse en kg

$V \rightarrow$ est la vitesse en m/s

$t \rightarrow$ est le temps en s

$p \rightarrow$ est la pression en Pa ou N/m²

$\rho \rightarrow$ est la densité exprimé en kg/m³

$A \rightarrow$ est l'aire en m²

$H \rightarrow$ est la chute exprimée en m et équivalente à un niveau d'énergie

$L \rightarrow$ est la longueur en m

$g \rightarrow$ est l'accélération de la gravité en m/s²

Le temps caractéristique de l'inertie de l'eau dans la conduite

- Posons : $\Delta h = \Delta H / H_0$, le taux de variation de la pression par rapport à la pression initiale.
- Pour une vitesse dans la conduite à la pleine charge de la turbine V_p :

$$\Delta h = \frac{-LV_p}{gH_0} \frac{dV_p}{dt}$$

Où :

$$\Theta = \frac{LV_p}{gH_0}$$

Est le temps caractéristique de l'inertie de l'eau dans la conduite. Si la conduite n'est pas uniforme :

$$\Theta = \frac{\Sigma LV_p}{gH_0}$$

Pour une coupure linéaire de débit

- Supposons que la turbine coupe linéairement le débit en manœuvrant les directrices comme mesuré lors des essais sur modèle stabilisé. Ouverture, temps et débit s'expriment linéairement les uns par rapport aux autres.
- À cause de l'augmentation de la pression lors de la coupure dynamique, le débit ne variera plus linéairement.
- Pour la condition initiale V_0 et H_0 , on peut écrire pour un instant t suivant :

$$\frac{V}{V_0} = \sqrt{\frac{H_0 + \Delta H}{H_0}} = \sqrt{1 + \Delta h}$$

En condition stabilisée, pour une position des directrices qui correspond à un emps initial t compris entre 0 et t_p

$$V = V_p \left(1 - \frac{t}{t_p}\right)$$

Où t est le temps d'exécution d'une coupure éventuelle et t_p est le temps de fermeture complet depuis la pleine charge.

En condition dynamique la vitesse de l'écoulement dépendra de l'augmentation de la chute :

$$V = V_p \left(1 - \frac{t}{t_p}\right) \sqrt{1 + \Delta h}$$

Par approximation on peut écrire :

$$\frac{V}{V_p} = \left(1 - \frac{t}{t_p}\right) \sqrt{1 + \Delta h} = \left(1 - \frac{t}{t_p}\right) \left(1 + \frac{\Delta h}{2}\right)$$

Sachant que :

$$\Delta h = -\Theta \frac{d\frac{V}{V_p}}{dt}$$

$$\Delta h = -\Theta \frac{\left(1 - \frac{t}{t_p}\right) \left(1 + \frac{\Delta h}{2}\right)}{dt} = -\Theta \left(\left(1 - \frac{t}{t_p}\right) \left(\frac{d\left(1 + \frac{\Delta h}{2}\right)}{dt}\right) + \frac{d\left(1 - \frac{t}{t_p}\right)}{dt} \left(1 + \frac{\Delta h}{2}\right) \right)$$

$$\Delta h = -\Theta \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{t_p}\right) \frac{d\Delta h}{dt} - \frac{1}{t_p} \left(1 + \frac{\Delta h}{2}\right) \right)$$

La valeur maximale de Δh es atteinte lorsque $\frac{d\Delta h}{dt} = 0$, à $t = t_p$

$$\Delta h_{max} = \frac{\Theta}{t_p} \left(1 + \frac{\Delta h_{max}}{2}\right) \rightarrow \Delta h_{max} = \frac{\frac{\Theta}{t_p}}{\left(1 - \frac{\Theta}{2t_p}\right)}$$

Calcul d'une surpression pour un coup de bélier massique

Soit une turbine de 330MW sous 116 m de chute avec 92% de rendement à ce point et une conduite forcée de 8 m dia. et 150 m de long. Avec un temps de manœuvre du distributeur de 12 secondes.

Solution

on peut calculer la surpression ainsi :

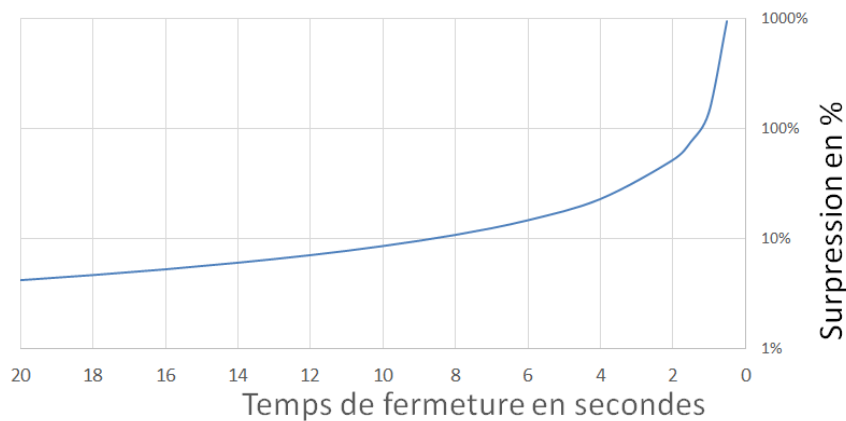
$$Q = \frac{P}{\rho g H \eta} = \frac{330000000}{1000 \cdot 9,81 \cdot 116 \cdot 0,92} = 315 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{315}{\pi \cdot 4^2} = 6,27 \text{ m/s}$$

$$\Theta = \frac{LV_p}{gH_0} = \frac{150 \cdot 6,27}{9,81 \cdot 116} = 0,82 \text{ s}$$

$$\Delta h_{max} = \frac{\frac{\Theta}{t_p}}{\left(1 - \frac{\Theta}{2t_p}\right)} = \frac{\frac{0,82}{12}}{\left(1 - \frac{0,82}{2 \cdot 12}\right)} = 7,1\%$$

$$H_{max} = H_0 + H_0 \cdot \Delta h_{max} = 116 + 0,071 \cdot 116 = 124 \text{ mce}$$



Exemple de relation de la surpression en fonction du temps de fermeture pour un coup de bélier de masse. Pour un coup de bélier de masse, la coupure instantanée conduit à une surpression infinie.

Effet de la compressibilité de l'eau - Cas 2, le coup de bélier acoustique

En régime transitoire, la variation de la pression s'accompagne de la variation du volume du cylindre d'eau due à la compressibilité de l'eau et à l'élasticité de la conduite.

Cette élasticité permet de réduire la surpression par rapport au coup de bélier de masse.

La coupure instantanée de débit - Étude qualitative

Étudions le phénomène de la réverbération (répercussion, diffusion) des ondes parcourant la conduite forcée en assumant une longueur L pour la conduite et une célérité (c) pour les ondes.

Un régime permanent avec une vitesse de l'écoulement V_0 est établi dans la conduite à l'amont de l'organe de coupure.

À $t=0$, la vitesse près de la coupure devient subitement nulle et une onde de surpression se propage à la vitesse du son c vers l'amont.

Ensuite, à l'aval de l'onde de surpression, l'énergie cinétique ($E_c = \frac{1}{2} \rho v^2$) est transformée en énergie potentielle ($E_p = \rho gh$) sous 2 formes qui agissent comme un ressort relié à la masse de l'eau:

- Le volume d'eau est comprimé élastiquement.
- La conduite est allongée sous la charge de surpression.

« Les ondes élastiques se propagent sans modification dans un milieu isotrope infini, mais sont susceptibles de réflexion et de réfraction quand elles rencontrent une surface séparant deux milieux différents. Deux cas sont à envisager : »

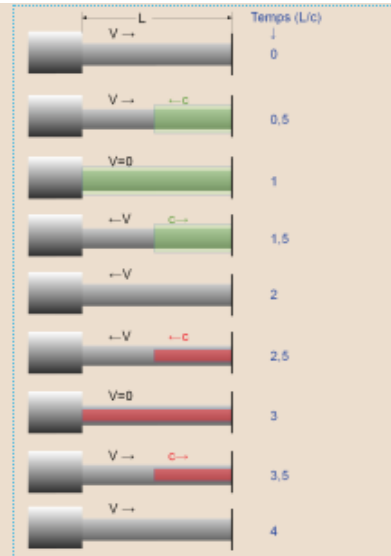
« • Quand une onde plane se propageant dans un fluide, rencontre normalement une surface rigide, elle se réfléchit sans changer de signe : ainsi une onde de compression se réfléchit en une onde de compression. »


« • Quand une onde plane se propageant dans un fluide, rencontre normalement une surface où la pression reste constante (surface libre d'un liquide), il y a réflexion avec changement de signe : ainsi une onde de compression donne naissance à une onde de dépression. »

Donc,

1. À $t=0$,
 - L'organe de coupure se ferme instantanément et une onde de pression se dirige vers l'amont à la vitesse c .

2. À $t=L/c$,
 - L'onde atteint le réservoir amont.
 - Se réfléchit et change de signe.
 - L'onde de dépression se dirige vers la turbine.
 - Simultanément, la vitesse de l'eau dans la partie décomprimée se dirige vers le réservoir amont.



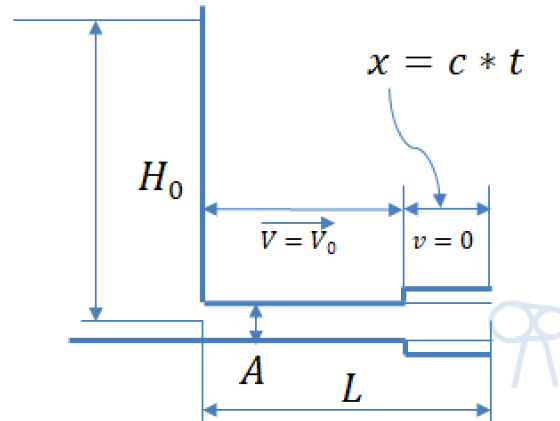
Réverbération de l'onde acoustique lors d'une coupure instantanée 

1. À $t=2L/c$,
 - La dépression atteint l'organe de coupure.
 - Se réfléchit sans changer de signe.
 - L'onde de dépression se dirige vers le réservoir amont.
2. À $t=3L/c$,
 - l'onde atteint le réservoir amont.
 - Se réfléchit et change de signe.
 - L'onde de pression se dirige vers la turbine.
3. À $t=4L/c$,
 - La dépression atteint la turbine.
 - Se réfléchit sans changer de signe.
 - L'onde de dépression se dirige vers le réservoir amont.
4. À $t= 4L/c + L/c$
 - l'onde atteint le réservoir amont.
 - Se réfléchit et change de signe.
 - L'onde de dépression se dirige vers la turbine.

La coupure instantanée de débit - Étude quantitative

Analysons à l'instant t la transformation de la quantité de mouvement en onde de pression lors d'une coupure instantanée de débit:

- La distance x parcourue par l'onde pendant le temps t est la vitesse du son dans la conduite remplie d'eau.
- La quantité de mouvement se transforme en onde de pression, on peut donc exprimer l'équilibre des forces dynamique et statique ainsi :



Le coup de bélier acoustique

$$m \frac{dV}{dt} = -\Delta p A = -\rho g \Delta H A$$

avec pour un intervalle de temps donné la masse de l'eau au repos est exprimée par :

$$m = \rho A x = \rho A c t$$

et comme pour ce même intervalle la vitesse passe de la vitesse initiale à une vitesse nulle :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-v_0}{t}$$

d'où on peut calculer la variation de la charge pour cette fermeture instantanée où $\Delta V = -V_0$:

Équation de Joukowski :

L'équation de Joukowski permet lors d'une coupure instantanée de calculer une surpression à partir de la vitesse de l'écoulement existant dans la conduite au moment du déclenchement de la coupure.

$$\Delta H = -\frac{c}{g} \Delta V$$

ΔH - est la surpression ou variation de chute exprimée en m et équivalente à un niveau d'énergie ; c - vitesse de l'onde (célérité) en m/s ; V - la vitesse en m/s ; g - est l'accélération de la gravité en m/s^2 .

La vitesse de l'onde dans la conduite

Cette vitesse dépend de l'élasticité du tuyau et de l'eau qui s'y trouve. Considérons, le cas assez courant, d'une conduite en acier dans l'air.

En termes d'énergie on peut écrire que l'énergie cinétique se transforme en énergie élastique, ce qui s'exprime au temps t :

$$\frac{1}{2} m V_0^2 = \frac{1}{2} \rho A_{Section} x V_0^2 = W_e + W_t$$

L'énergie élastique étant la somme du travail élastique de l'eau et du tuyau.

Pour l'eau, son énergie élastique s'exprime dans l'axe axial comme :

$$W_e = \int_0^x F dx = \frac{F^2 x}{2 E_e A_{Section}}$$

Où : $F = \rho g \Delta H A_{Section}$

Et :

$$A_{Section} = \left(\frac{\pi D_t^2}{4} \right)$$

Et donc :

$$W_e = \frac{(\rho g \Delta H)^2 \pi D_t^2}{8 E_e}$$

Où E_e est le module d'élasticité de l'eau.

Puis, pour le tuyau, son énergie élastique axiale s'exprime comme :

$$W_t = \int_0^x F dx = \frac{F^2 x}{2 E_t e_{Paroi} A_{Paroi}}$$

Où :

$$F = \rho g \Delta H A_{Section} = \rho g \Delta H \left(\pi \frac{D_t^2}{4} \right)$$

Et : $A_{Paroi} = (\pi D_t e_{Paroi})$

Donc :

$$W_t = \frac{F^2 x}{2 E_t (\pi D_t e_{Paroi})} = \frac{\left(\rho g \Delta H \left(\pi \frac{D_t^2}{4} \right) \right)^2 x}{2 E_t (\pi D_t e_{Paroi})} = \frac{(\rho g \Delta H)^2 (\pi D_t^3) x}{8 E_t e_{Paroi}}$$

L'énergie cinétique et l'énergie élastique étant égales :

$$\frac{1}{2} \rho \left(\pi \frac{D_t^2}{4} \right) x V_0^2 = W_e + W_t = \frac{(\rho g \Delta H)^2 \pi D_t^2 x}{8 E_e} + \frac{(\rho g \Delta H)^2 (\pi D_t^3) x}{8 E_t e_{\text{Paroi}}}$$

$$V_0^2 = \frac{2}{\rho \left(\pi \frac{D_t^2}{4} \right)} \left(\pi \frac{D_t^2}{4} \right) (\rho g \Delta H)^2 \left(\frac{1}{2 E_e} + \frac{D_t}{2 e_{\text{Paroi}} E_t} \right)$$

$$\Delta H = \frac{V_0}{g \sqrt{\rho \left(\frac{1}{E_e} + \frac{D_t}{e_{\text{Paroi}} E_t} \right)}} = \frac{c}{g} V_0$$

L'équation de la vitesse du son dans une conduite est donc :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho \left(\frac{1}{E_e} + \frac{D_t}{e_{\text{Paroi}} E_{\text{tuyau}}} \right)}}$$

ρ - la densité exprimée en kg/m^3 ; E_e – module d'élasticité de l'eau en Pa ou N/m^2 ;

D_t – diamètre du tuyau en m ; e_{paroi} – épaisseur de la paroi en m ; E_{tuyau} – module d'élasticité du tuyau en Pa ou N/m^2 .

Calcul d'une surpression lors d'une coupure instantanée

Soit une turbine produisant 330MW sous 116 m de chute avec 92% de rendement à ce point et une conduite forcée de 8 m diamètre et 150 m de long dont l'acier a 4 cm d'épaisseur.

À cause d'une rupture les directrices se ferment instantanément ...

(Les directrices ont un rôle de régulation. Ce sont les directrices qui contrôlent le débit de l'eau dans la turbine. L'aube directrice est reliée au mécanisme de vannage qui permet de la faire pivoter dans l'axe de son tourillon en même temps que ses voisines et ainsi de faire varier l'espace entre elles).

Solution

$$Q = \frac{P}{\rho g H \eta} = \frac{330000000}{1000 \cdot 9,81 \cdot 116 \cdot 0,92} = 315 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{315}{\pi \cdot 4^2} = 6,27 \text{ m/s}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho \left(\frac{1}{E_c} + \frac{D_t}{\epsilon_{\text{Poisson}} E_t} \right)}} = \frac{1}{\sqrt{1000 \left(\frac{1}{2,2 \cdot 10^9} + \frac{8}{0,04 \cdot 210 \cdot 10^9} \right)}} = 843 \text{ m/s}$$

$$\Delta H = \frac{c}{g} V_0 = \frac{843}{9,81} 6,27 = 539 \text{ mce}$$

$$H_{\text{max}} = H_0 + \Delta H = 116 + 539 = 655 \text{ mce}$$

Fermeture non-instantanée en tenant compte du coup de bélier acoustique

Si on coupe le débit linéairement en T secondes.

- Si $T > 2L/c$, le phénomène se distribue dans le temps sur le nombre de période $2L/c$ contenue dans T.

La valeur maximale de la surpression est alors donnée par la formule du **pic de Michaud**:

$$\text{Nombre de périodes} = T/2 \frac{L}{c}$$

$$\Delta H_{\text{max}} = \frac{\frac{c}{g} V_0}{\text{Nombre de périodes}} = \frac{2L}{T} \frac{v_0}{g}$$

- Si $T < 2L/c$, il ne se produit pas de réduction de la surpression par interférence d'ondes et la valeur maximale à considérer est:

$$\Delta H_{\text{max}} = \frac{c}{g} V_0$$

Calcul d'une surpression pour une coupure de débit linéaire.

Soit une turbine produisant 330MW sous 116 m de chute avec 92% de rendement à ce point et une conduite forcée de 8 m diamètre et 150 m de long.

Le temps de manœuvre pour la fermeture est de 12 secondes.

Solution

$$Q = \frac{P}{\rho g H \eta} = \frac{330000000}{1000 \cdot 9,81 \cdot 116 \cdot 0,92} = 315 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{315}{\pi \cdot 4^2} = 6,27 \text{ m/s}$$

Calcul du pic de Michaud :

$$\Delta H_{max} = \frac{2L}{T} \frac{V_0}{g} = \frac{2 \cdot 150}{12} \frac{6,27}{9,81} = 16 \text{ mce}$$

$$\Delta H = H_0 + \Delta H_{max} = 116 + 16 = 132 \text{ mce}$$

Références bibliographiques:

- [1] Michel Hug (sous la direction de): Mécanique des fluides appliquée aux problèmes d'aménagement et d'énergétique – Eyrolles, 1975
- [2] R. Ginocchio: Aménagements hydro-électriques – Eyrolles, 1959
- [3] L. Escaude: Hydraulique générale – Privat, 1943
- [4] P. Chapouthier: Cours d'hydraulique de l'École Nationale des Ponts et Chaussées – ENPC, 1956
- [5] Frédéric Élie: Acoustique non linéaire, saturation extraordinaire et propagation paramétrique – site <http://fred.elie.free.fr>, mai 2009
- [6] A. Stucky: Chambres d'équilibre – École Polytechnique de l'Université de Lausanne, 1950
- [7] M. Bouvard: A propos de la condition de Thoma dans les cheminées cylindriques à étranglement optimum – Rev. La Houille Blanche, n° spécial A/1952 – article publié par SHF et disponible sur le site <http://www.shf-lhb.org>.