GÉNIE INDUSTRIEL
MANAGEMENT DE PROJET [MP]
[ST II / S2]
Mr. FRITAS Rafik

OBJECTIF:

Ce cours situe le projet dans l'environnement de l'entreprise avec un regard particulier sur la question de son évaluation. Le module de management de projet est approché d'un point de vue d’organisation fonctionnelle [comporte des activités de planification, d'organisation, de pilotage et d'information afin que le projet puisse se mettre en route et puisse être maintenu].

Alors, on va étudier l'ensemble des activités de pilotage, de planification, de surveillance et de contrôle nécessaires lors de l'élaboration nouvelle ou lors de la modification de projet.

Donc, notre bute dans ce cours est de réunir ces éléments et d'élaborer d'une façon simple les concepts à mettre en ouvre pour gérer un projet.

PROGRAMM

1. Qu'est ce qu'un projet ?

a) Structure fonctionnelle d'un projet
b) Les spécifications techniques
- Les tâches
- Les ressources
- Les contraintes

2. Planification (Aspect Technique)

a) PERT (Program Evaluation and Review Technic)
- Les principes de PERT
- Réalisation d'un planning PERT
- Evaluation de Réseau PERT [chemin critique / marges]

b) Diagramme de GANTT
c) PERT Charge [Répartition des moyens]
d) PERT Probabiliste

La Théorie de l'ordonnancemet est une branche de la Recherche opérationnelle qui s'intéresse au calcul de dates d'exécution optimales de tâches. Pour cela, il est très souvent nécessaire d'affecter en même temps les ressources nécessaires à l'exécution de ces tâches. Un problème d'ordonnancement peut être considéré comme un sous-problème de planification (exécuter l'opérationnelle des tâches planifiées)

Un problème d'ordonnancement consiste à organiser dans le temps la réalisation de tâches, compte tenu de contraintes temporelles (délais, contraintes d'enchainement) et de contraintes portant sur la disponibilité des ressources requises.

Les Spécifications techniques :

Dans tout Projet, On trouve une prise de compte simultanée de ces trois catégories de [les tâches / les Ressources / Les contraintes / les objectifs].

On va s'intéresser par la définition par un planning d'Exécution des Tâches [ORdRes de fabrication (OF) et "calendrier"] et d'allocation des ressources et vise à satisfaire un ou plusieurs objectifs. Une planification est très souvent représenté par un diagramme de GANTT

Les Tâches

La Tâche est le plus petit élément de gestion de projet, Autrement dit, c'est une ~~él~~ entité élémentaire localisée dans le temps par une date de début et/ou de fin, dont la réalisation nécessite une durée, et qui consomme un moyen selon une certaine intensité.

Les Ressources

La Ressource est un moyen technique ou humain destiné à être utilisé pour la réalisation d'une tâche et sa ~~c~~apacité caractérisé par une disponibilité en quantité limitée.

Les Contraintes

Le triangle de la triple Contrainte

Le triangle de la triple contrainte, aussi appelé triangle de la Performance, est souvent utilisé pour illustrer l'interdépendance des Variables d'un projet. En effet, dans un projet, les modifications apportées à l'une des variables auront irrévocablement des répercussions sur les autres ou, en d'autres termes, privilégier une contrainte se fait généralement au détriment des autres.

Des Contraintes temporelles :

- Les contraintes de temps alloué, issues généralement d'impératifs de gestion et relatives aux dates limites des tâches (délais de livraisons, disponibilité des approvisionnement) où à la durée totale d'un projet.

Des Contraintes de Ressources :

- Les contraintes d'utilisation de ressources qui expriment la nature et la quantité des moyens utilisés par les tâches, ainsi que les caractéristiques d'utilisation de ces moyens.
- Les contraintes de disponibilité des ressources qui précisent la nature et la quantité des moyens disponibles au cours du temps. Toutes ces contraintes peuvent être formalisées sur la base des distances entre début de tâches ou potentiels.

Les Objectifs

On cherchera donc à **minimiser** ou **maximiser** de tels critères. On note par exemple ceux :

Liés au Temps :

- Le temps Total d'exécution ou le temps moyen d'achèvement d'un ensemble de tâches.
- Le stock d'en-cours de Traitement
- différents retards (maximum, moyen, somme, nbre, etc.) ou avances par rapport aux dates limites fixées.

Liés aux Ressources :

- La quantité totale ou pondérée de ressources nécessaires pour réaliser un ensemble de tâches.
- La charge de chaque Ressource
- liés à une énergie ou un débit
- liés aux coût de lancement, de production, de transport, ...etc mais aussi aux Revenus, aux retours d'investissements.

PERT (Program Evaluation and Review Technic)

PERT est une méthode de planification qui répond aux exigences : [délai, ressources, coût]. Tel que la planification ne sera efficace que dans la mesure où elle permettra de prévoir au moment opportun, les contrôles qui s'impose en cours de réalisation.

Donc, cette méthode fournit un outil permettant d'optimiser et de planifier l'ordonnancement de taches qui sont utilisée dans la gestion de projet. Son but est de trouver la meilleure possibilité pour qu'un projet soit terminé dans les meilleurs délais, et d'identifier les tâches critiques, c'est-à-dire les tâches qui ne doivent souffrir aucun retard sous peine de retarder l'ensemble de projet.

La technique PERT va nous permettre de mettre en ordre, sous forme de réseau, plusieurs tâches, à identifier leurs enchainements, leurs dépendances. Et pour chaque tâche, on indique une date de début et de fin.

Le problème est donc d'élaborer, puis de gérer un planning des opérations qui soit une représentation fidèle du programme à réaliser.

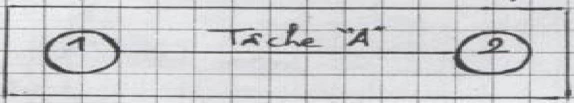
Les opérations se caractérisent toutes par trois éléments :

- Un certain délai de réalisation
- La disponibilité de certaines ressources (moyens)
- Certain lien de dépendance logique vis-à-vis d'autres opérations.

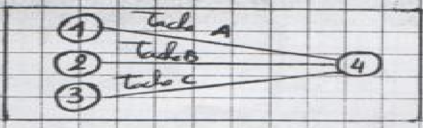
Le réseau PERT

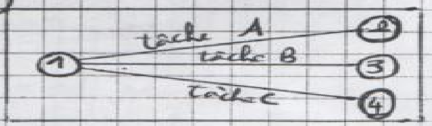
Le RÉSEAU : [Théorie de Graphe]

→ Sur ce graphique, chaque opération est représentée par une flèche. Les flèches partent d'une Etape pour aboutir à une autre ; [la tâche "A" par exemple, part de l'Etape "1" pour aboutir à l'étape "2"]



→ Les Etapes, ou noeuds, sont figurées par des cercles ou d'autre figures fermées.
Elles Représentent des points dans le déroulement du projet. Contrairement aux tâches, elles n'ont donc pas de durée et ne nécessitent aucun moyen.





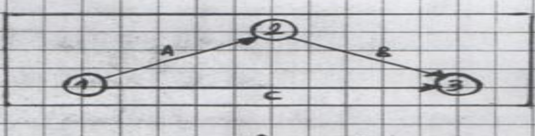
→ Si plusieurs plusieurs opérations convergent vers une étape, celle-ci sera atteinte au moment où toutes les opérations concourantes seront achevées.
. Les opérations partant d'une étape, ne peuvent commencer que lorsque celle-ci a été atteinte.

Le RÉSEAU "PERT", formé d'étapes reliées par des tâches permet de traduire la logique d'exécution d'un projet en exprimant toutes les relations, ou contraintes, existant entre les tâches.

1/ Prise en compte des contraintes :

→ Succession & Simultanéité :

La figure ci-dessus représente l'ordonnancement de trois tâches ; A, B et C. L'opération "B" succède à l'opération A, c'est-à-dire qu'elle ne peut commencer que lorsque "A" est terminée. Au contraire, l'opération "C" est simultanée, elle peut être menée de front avec les opérations "A" et "B".



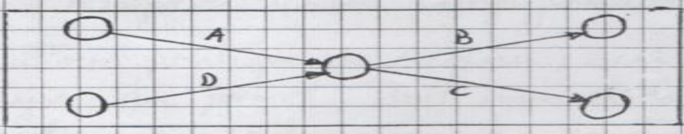
→ Introduction des tâches fictives :

L'ensemble [tâche + Etape] n'est pas toujours suffisant pour exprimer toutes les contraintes possibles.

Supposons par exemple qu'il faille « traduire en PERT » les enchainements suivants :

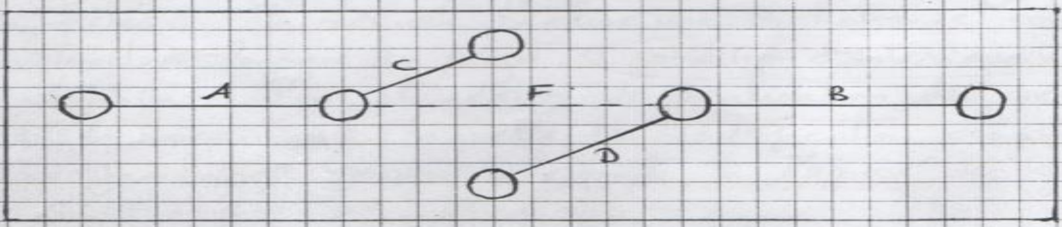
La tâche "B", succède à la tâche "A"
La tâche "C", succède à la tâche "A"
La tâche "B", succède à la tâche "D"

La première représentation qui vient à l'esprit est fausse : elle figure bien toutes les contraintes imposées, mais elle en ajoute une : [la tache "C" est successeur de la tâche "D"] ce qui n'était pas précisé.



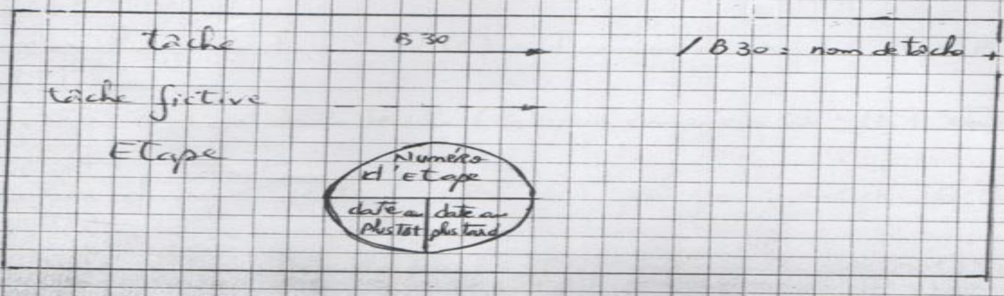
Pour Résoudre des problèmes de ce type, on est amené à introduire une classe de tâches, dites "fictives", dont le seul objet est de matérialiser une contrainte.

Une "fictive" ne représente donc aucune opération, ne nécessite aucun moyen et a une durée nulle.
Elle permet de figurer simplement l'ensemble des contraintes de l'exemple précédent : sur la figure ci-dessous, grâce à l'introduction de la tache fictive "F", la tâche "C" n'est plus successeur de "D"



2/ Prise en Compte des durées :

Certaines de ces tâches ne peuvent démarrer avant que certaines autres soient effectuées, tandis qu'il existe des tâches qui peuvent s'exécuter en parallèle.
Comme on a déjà vu : PERT est composé d'étapes et de tâches.



Dans la méthode "PERT", on calcule deux valeurs pour chaque étape :

- La date au plus tôt : Il s'agit de la date à laquelle la tache pourra être commencée au plus tôt, en tenant compte du temps nécessaire à l'exécution des tâches précédentes.
- La date au plus tard : Il s'agit de la date à laquelle une tache doit être commencée à tout prix si l'on ne veut pas retarder l'ensemble du projet.

Exemple d'Application :

Dans une entreprise, dix ouvriers sont chargés d'effectuer chacun une tâche différente contribuant à la fabrication d'un même produit.

- l'ouvrier chargé de la tâche (F) peut commencer, (B) étant terminée.
- l'ouvrier chargé de la tâche (C) peut commencer, (A, H et B) étant terminées.
- l'ouvrier chargé de la tâche (G) peut commencer, (R) étant terminée.
- l'ouvrier chargé de la tâche (E) peut commencer, (G, S et R) étant Terminées.
- l'ouvrier chargé de la tâche (S) peut commencer (D et F) étant terminées.
- l'ouvrier chargé de la tâche (D) peut commencer, (R) étant terminée.
- l'ouvrier chargé de la tâche (H) peut commencer, (B) étant terminée.
- l'ouvrier chargé de la tâche (R) peut commencer à n'importe qu'elle moment.
- l'ouvrier chargé de la tâche (A) peut commencer (D, F et R) étant terminées.
- l'ouvrier chargé de la tâche (B) peut commencer à n'importe quel moment.

Ce qui donne le tableau suivant :

Tâches	Tâches Antérieurs (précédentes)
F	B
C	A, H, B
G	R
E	G, S, R
S	D, F
D	R
H	B
R	—
A	D, F, R
B	—

En Examinant le tableau précédent, il ressort que les tâches : F, G, D, H n'ont qu'une tâche antérieure :

B pour F
R pour G
R pour D
B pour H

Par contre les taches R et B n'ont pas de taches antérieurs.

Les tâches C, E, S, A ont plusieurs tâches antérieurs :

A, H, B pour C
G, S, R pour E
D, F pour S.
D, F, R pour A

Le problème qui se pose est de déterminer pour les tâches [C , E, S, A] la ou les tâches immédiatement antérieurs ; il suffit pour cela d'isoler les tâches qui n'ont qu'une tâche antérieure ou qui n'en ont pas , ce qui permet de compléter le tableau n° 1 en ajoutant deux colonnes supplémentaires (tâches immédiatement antérieurs, graphes partiels , tableau n° 2) .

Dans un premier temps il s'agit de reporter les tâches antérieurs simples dans la colonne « tâches immédiatement antérieurs », ainsi pour la tâche (F) , la tâche (B) qui lui est antérieure sera inscrite dans la colonne « tâche antérieures » et parce qu'elle est l'unique tâche antérieure à (F) , elle est a fortiori immédiatement antérieure à (F) , nous l'inscrivons également dans la colonne « tâche immédiatement antérieurs ».

Il en est de même pour les tâches antérieurs à [G , D et H] .

CONSTRUCTION DES GRAPHES PARTIELS :

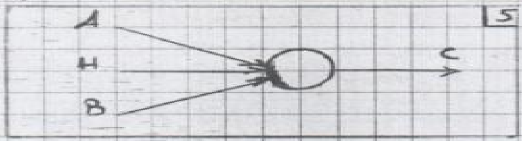
Dans un deuxième temps , connaissant les tâches immédiatement antérieurs à [F, G , D et H] nous pouvons tracer pour chacune de ces tâches les graphes partiels :

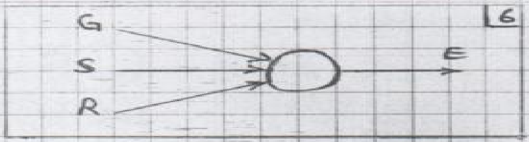
Nous reportons ces graphes partiels dans la colonne prévue à cet effet (tableau n° 2) .

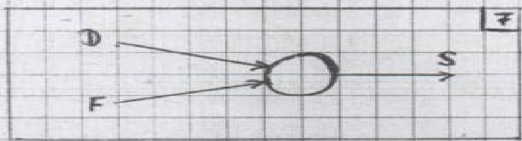
tableau n° 2

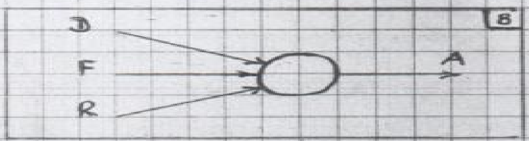
tâches	tâches antérieurs	tâches immédiatement antérieures	Graphes partiels
F	B	B	$\xrightarrow{B} \bigcirc \xrightarrow{F}$
C	A, H, B		
G	R	R	$\xrightarrow{R} \bigcirc \xrightarrow{G}$
E	G, S, R		
S	D, F		
D	R	R	$\xrightarrow{R} \bigcirc \xrightarrow{D}$
H	B	B	$\xrightarrow{B} \bigcirc \xrightarrow{H}$
R	—	—	
A	D, F, R		
B	—	—	

Pour les Tâches : [C , E , S et A] , afin de déterm les tâches immédiatement antérieures , nous allons supposer que les tâches antérieures sont convergentes ce qui nous donnerait les graphes partiels suivant







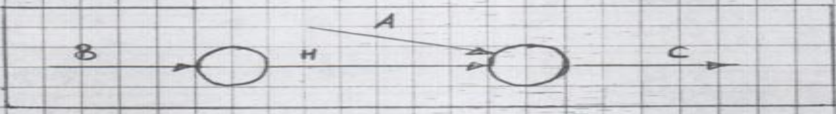


Si à ces graphes partiels à tâches convergentes nous ajoutons les graphes partiels simples du tableau (n°2 nous avons huit graphes partiels .

En Examinant ces huit graphes partiels , il s'agit de s'il n'y a pas de contradiction .

Les graphes (4 et 5) sont contradictoires .
En effet , si (B est antérieure à H ⇒ B et H ne peuvent pas converger vers C) comme l'indique le graphe 5.

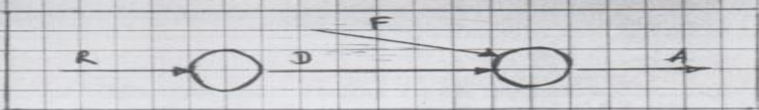
On devrai avoir :



dont les tâches immédiatement antérieures à "C" Sont : [A et H]

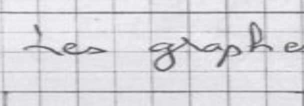
Il en est de même pour les graphes (3 et 8) :

Donc

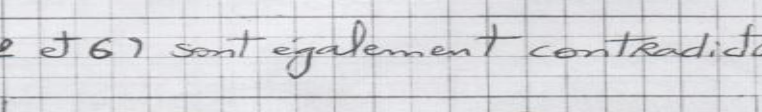


[D & F] sont immédiatement antérieures à (A)

Les graphes (2 et 6) sont également contradictoires .



Donc



[G & S] sont immédiatement antérieures à (E)

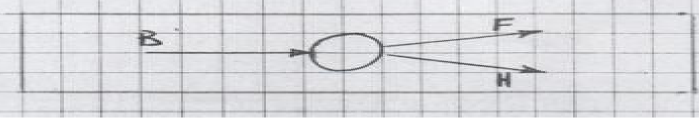
Nous pouvons compléter le tableau (n°2) :

	tâches	tâches antérieures	tâches immédiatement antérieures	Graphes partiels
1	F	B	B	B → ○ → F
2	C	A H B	A H	A, H → ○ → C
3	G	R	R	R → ○ → G
4	E	G S R	G S	G, S → ○ → E
5	S	D F	D F	D, F → ○ → S
6	D	R	R	R → ○ → D
7	H	B	B	B → ○ → H
	R	—	—	—
8	A	D F R	D F	D, F → ○ → A
	B	—	—	—

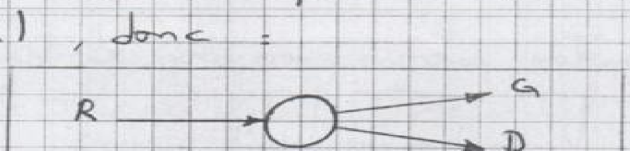
[Regroupement des Graphes Partiels :]

Reprenons les graphes du tableau :

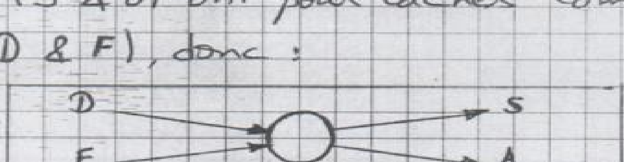
(a) → Les graphes (1 & 7) ont pour tâche commune la tâche (B) donc :



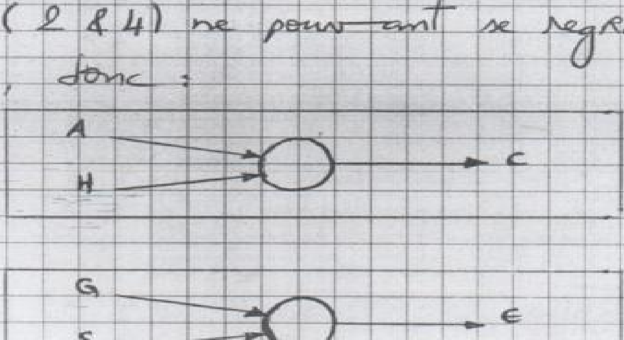
(b) → Les graphes (3 & 6) ont pour tâche commune la tâche (R), donc :



(c) → Les graphes (5 & 8) ont pour tâches communes, les tâches (D & F), donc :



(d) → Les graphes (2 & 4) ne pouvant se regrouper avec aucun graphe, donc :



DETERMINATION DES TÂCHES DE DEBUT & DE FIN DE L'OUVRAGE :

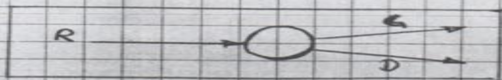
Les graphes partiels que nous avons obtenus vont constituer le réseau P.E.R.T définitif, mais pour le construire, il est important de savoir par quelles tâches commence et finit le travail.

- Les tâches de début du Réseau P.E.R.T sont celles qui n'ont pas de tâches antérieures.
- Les tâches de fin d'un Réseau P.E.R.T sont celles qui ne sont pas antérieures à d'autres tâches.

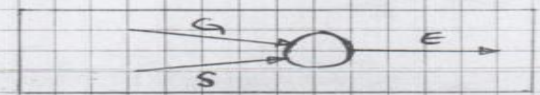
Ainsi, dans le tableau :

- Les tâches (R & B) n'ayant pas de tâches antérieures sont des tâches de début.
- Les tâches (E & C) n'étant pas citées dans la colonne « tâches antérieures », sont des tâches de fin.

+ Ce qui revient à dire que « les graphes partiels » commençant par les tâches (B & R) se situeront au début du Réseau, soit :

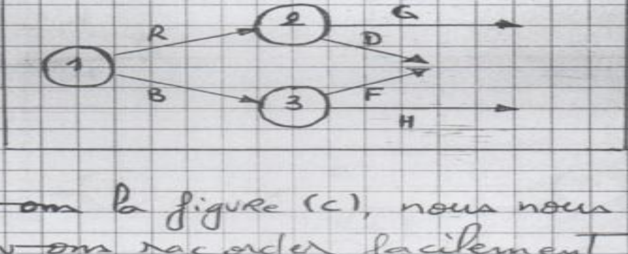


+ Et que les graphes se terminant par les tâches (E & C se situeront à la fin du Réseau, soit :

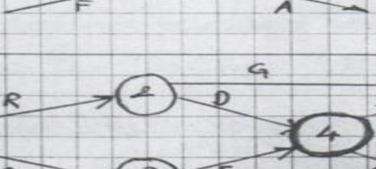


CONSTRUCTION DU RESEAU P.E.R.T

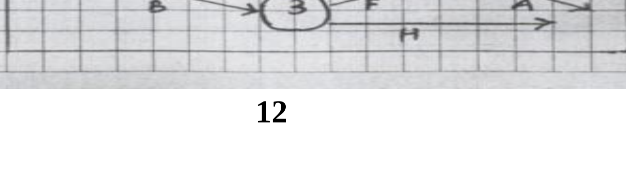
Nous plaçons l'étape (1) de laquelle partiront les graphes commençant par les tâches (B & R) :



Si nous observons la figure (c), nous nous apercevons que nous pouvons racorder facilement le graphe partiel suivant :

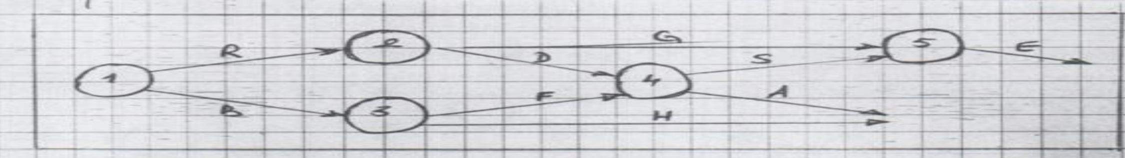


Ce qui donne :



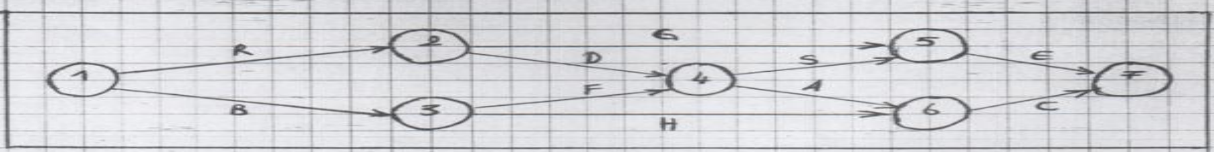
Ensuite on peut Raccorder la figure (d) :

Ce qui donne :



Ainsi, on Raccorde :

Soit :



Ainsi la construction du Réseau P.E.R.T étant réalisée, nous vérifions qu'il commence par les tâches (R & B) et qu'il se termine par les tâches (E & C).

Détermination des temps

Chemin Critique / Marges

Après la construction d'un réseau P.E.R.T, que pourrons nous faire ? A quoi va-t-il servir ?

Le **premier avantage** est de pouvoir indiquer, avant les travaux, la durée totale de l'ouvrage à réaliser.

Le **second avantage** est de faire apparaître sur le réseau le chemin qui, formé par la succession de plusieurs tâches, nous donne le temps le plus long : c'est le Chemin Critique

En dehors de ce chemin critique, le **troisième avantage** est de pouvoir déterminer sur les autres chemins du Réseau les temps disponibles grâce auxquels nous engagerons des moyens au moment opportun.

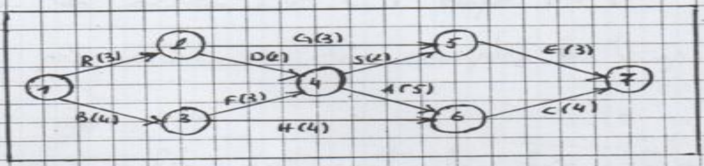
Calcul De la DUREE :

Le calcul de la durée n'est possible que si le temps passé pour effectuer chaque tâche du réseau est connue avec précision.

Le temps de chacune des tâches doit Tenir compte des aléas inhérents à chaque opération à réaliser.

Supposons ce problème résolu et Reprenons le réseau de l'exemple d'application, sur lequel nous porterons les temps devant chaque tâche, ce qui nous donne la figure suivante :

tâche	Antériorité	durée (h)
F	B	3
C	A H B	4
G	R	3
E	G S R	3
S	D F	2
D	R	2
H	B	4
R	—	3
A	D F R	5
B	—	4



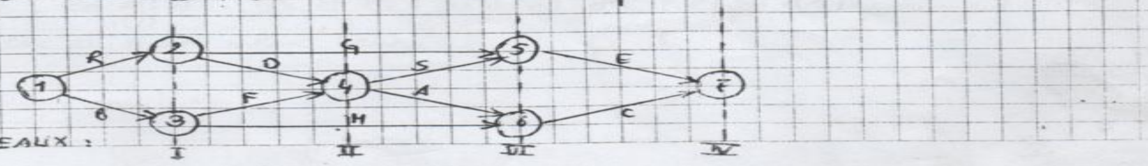
A la lecture de ce réseau nous savons que la tâche
[R] sera Réalisé en (3 heures)
[B] sera Réalisé en (4 heures) ...etc

Mais lorsque nous arriverons à l'étape (7), combien de temps se sera-t-il écoulé ?

Comment procéder.

Il serait illogique d'additionner l'ensemble des temps, ce qui donnerait (33 heures) pour achever l'ouvrage

Reprenons le réseau et divisons-le par niveaux. Par niveau nous entendons une série de tâches qui partent d'une même étape ou aboutissent à une même étape.



DETERMINATION de CHEMIN CRITIQUE :

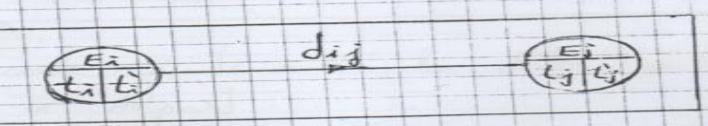
DETERMINATION des Dates au plustôt :

a/ On affecte à l'entrée : $[t_1 = 0]$.

b/ Pour un sommet (j), On calcule la date au plustôt $[t_j]$.

$$\boxed{t_j = \mathrm{Max}\,[\,t_i + d_{ij}\,]}$$

Avec : ("i" antécédent de "j")
("d_{ij}" : durée de l'arc (ij))
("t_i" : date au plutôt de sommet "i")
("t_j" : date au plutôt de sommet "j")

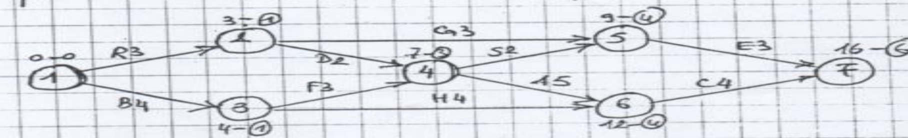


Et aussi : ("t'_i" : date au plutard de Sommet "i")
("t'_j" : date au plutard de Sommet "j")

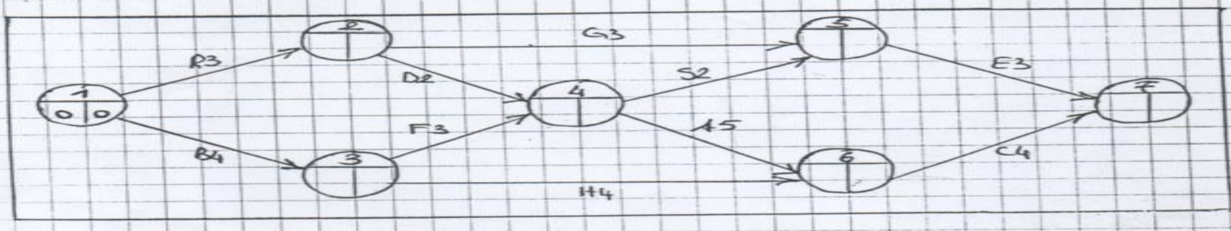
Donc, En calculant les date au plutôt, on détermine aussi le [Ts]

[Ts] : durée Minimale nécessaire pour la Réalisation de l'ouvrage.

En Reprenant notre exemple :



Donc on peut le Représenter comme suite :



On calcule maintenant les dates au plustôt.

On a au départ :

$t_1 = 0$

Alors :

$t_2 = [t_1 + (\text{durée de R})] = (t_1 + 3) = 3\ h$

$t_3 = [t_1 + (\text{durée de B})] = (t_1 + 4) = 4\ h$

$t_4 = \text{MAX}\ [t_2 + (\text{durée D}),\ t_3 + (\text{durée F})] =$

$= \text{MAX}\ [(t_2 + 2),\ (t_3 + 3)]$

$= 7\ h$

$t_5 = \text{MAX}\ [(t_2 + (\text{durée G}),\ t_4 + (\text{durée S})]$

$= \text{MAX}\ [(t_2 + 3),\ (t_4 + 2)]$

$t_6 = \text{MAX}\ [t_3 + (\text{durée H}),\ t_4 + (\text{durée A})]$

$= \text{MAX}\ [(t_3 + 4),\ (t_4 + 5)]$

$= \text{MAX}\ [(4 + 4),\ (7 + 5)]$

$= 12\ h$

$t_7 = \text{MAX}\ [t_5 + (\text{durée E}),\ t_6 + (\text{durée C})]$

$= \text{MAX}\ [(t_5 + 3),\ (t_6 + 4)]$

$= \text{MAX}\ [(9 + 3),\ (12 + 4)]$

$= 16\ h$

Dans notre cas, on a : $(t_s = t_7)$

Alors :

La Durée minimal nécessaire de la réalisation d'ouvrage est de : [16 heures]

DETERMINATION des Dates au plus Tard :

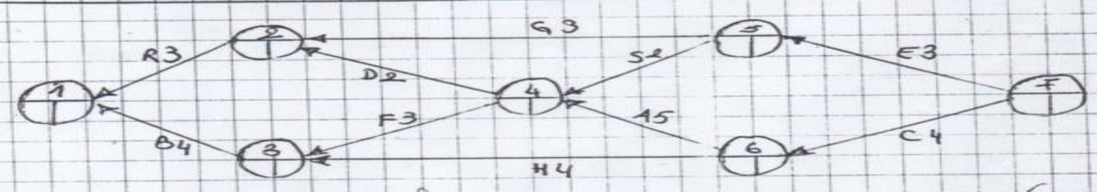
a/ On construit le Graphe Inversé

b/ On calcule les Dates au plus tôt dans le graphe Inversée. En affectant [$t_s = 0$]

c/ On calcule les dates au plus tard :

Date au Plus Tard = (Durée Minimum de Réalisation de l'ouvrage) − (les dates au plus tôt dans le graphe inversé)

On Reprend notre Exemple d'Application et on va commencer par la construction de Graphe Inversé :



Graphes Inversé

On calcule les dates au plus tôt de graphes Inverse :

au départ on a :

$t_7 = 0$ h

Alors,

$t_6 = [t_7 + (\text{durée } C)]$
$= [0 + 4]$
$= 4$ heure

$t_5 = [t_7 + (\text{durée } E)]$
$= [0 + 3]$
$= 3$ heure

$t_4 = \text{MAX}[t_5 + (\text{durée } S), t_6 + (\text{durée } I)]$
$= \text{MAX}[(3 + 2), (4 + 5)]$
$= 9$ heure

$t_3 = \text{MAX}[t_4 + (\text{durée } F), t_6 + (\text{durée } H)]$
$= \text{MAX}[(9 + 3), (4 + 4)]$
$= 12$ heure

$t_2 = \text{MAX}[t_4 + (\text{durée } D), t_5 + (\text{durée } G)]$
$= \text{MAX}[(9 + 2), (3 + 3)]$
$= 11$ heure

$t_1 = \text{MAX}[t_2 + (\text{durée } R), t_3 + (\text{durée } B)]$
$= \text{MAX}[(11 + 3), (12 + 4)]$
$= 16$ heures

On calcule maintenant les dates au plus tard :

$t'_7 = 16 - t_7$	$= 16 - 0$	$\longrightarrow$	$t'_7 = 16$
$t'_6 = 16 - t_6$	$= 16 - 4$	$\longrightarrow$	$t'_6 = 12$
$t'_5 = 16 - t_5$	$= 16 - 3$	$\longrightarrow$	$t'_5 = 13$
$t'_4 = 16 - t_4$	$= 16 - 9$	$\longrightarrow$	$t'_4 = 7$
$t'_3 = 16 - t_3$	$= 16 - 12$	$\longrightarrow$	$t'_3 = 4$
$t'_2 = 16 - t_2$	$= 16 - 11$	$\longrightarrow$	$t'_2 = 5$
$t'_1 = 16 - t_1$	$= 16 - 16$	$\longrightarrow$	$t'_1 = 0$

Détermination des tâches critiques :

Les Tâches critiques sont les tâches qui réalise les conditions suivantes :

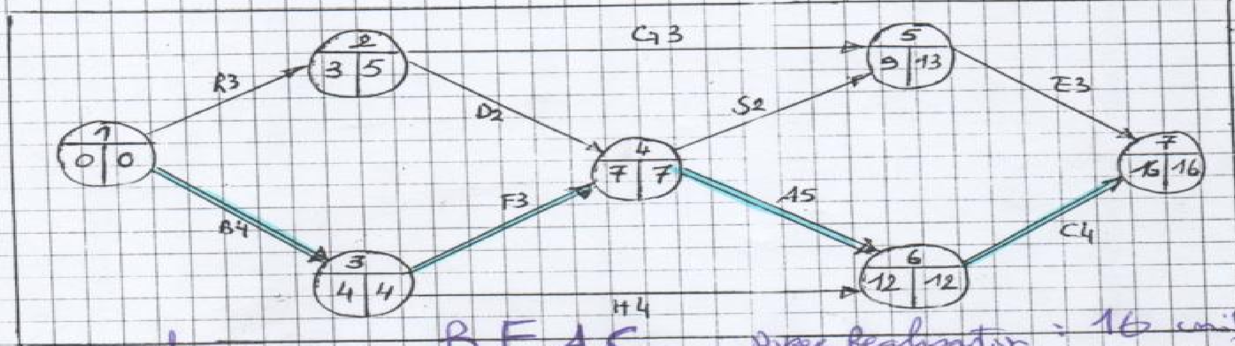
$$\boxed{\text{Date au plus tôt} = \text{Date au plus tard}}$$

Donc dans notre cas, on Remarque que les tâches pour lesquelles les dates au plus tôt et les dates au plus tard sont ceux qui relient les étapes :
{ [1], [3], [4], [6], [7] }

C'est à dire pour les tâches :
{ [B], [F], [A], [C] }

On vérifie : (B4) + (F3) + (A5) + (C4) = 16 heure

Donc le Reseau PERT est devenu :



chemin critiq : BFAC , avec Realisation : 16 unité Temp

Détermination des Intervalles de Flottement [IF] :

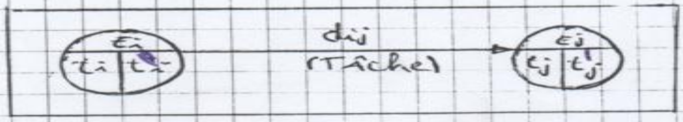
La Détermination de l'intervalle de flottement d'un Sommet " E_i " est fait comme suite :

$$\boxed{IF = (t'_i - t_i) = (\text{Date au plus tard} - \text{Date au plus tôt})}$$

Dans notre Exemple :

Sommet [ETAPE]	DATE au plus tard [t'_i]	DATE au plus tôt [t_i]	IF (h)
(1)	0	0	0
(2)	5	3	2
(3)	4	4	0
(4)	7	7	0
(5)	13	9	4
(6)	12	12	0
(7)	16	16	0

DETERMINATION des Marges :



Chaque tâche du graphe est affectée de cinq paramètres temporels :

- La date de début « au plustôt » [t_i]
- La date de début « au plustard » [t'_i]
- La durée de la tâche [d_{ij}]
- La date de fin « au plus tôt » [t_j]
- La date de fin « au plustard » [t'_j]

Ces paramètres vont permettre de définir les marges.

MARGE Totale :

Cette marge correspond à la durée dont une tâche peut être prolongée ou Retardée sans augmenter la durée totale du projet.

Quand cette marge s'annule la tâche devient critique.

$$\boxed{MT = (t'_j - t_i) - d_{ij}}$$

OR

MARGE Totale = (date de fin au plustard (t'_j) − date début au plustôt (t_i)) − duré de la Tâche (d_{ij})

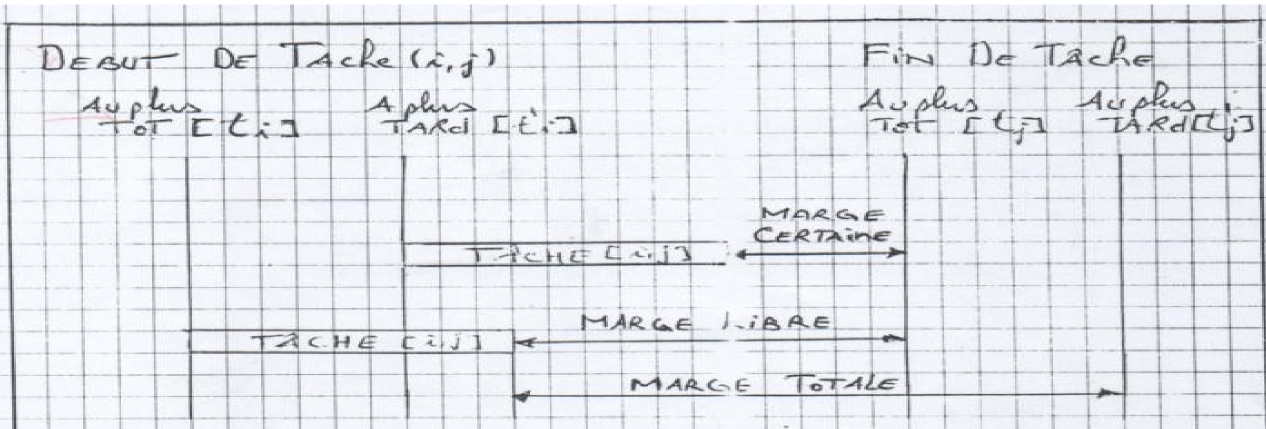
MARGE LIBRE :

Cette marge correspond à la durée dont une tâche peut être prolongée ou Retardée sans déplacer aucune autre tâche du Projet.

C'est la Réserve de sécurité attachée à la tâche

Marge Libre = (La date de fin au plustôt (t_j) − date début au plustôt (t_i)) − durée de la tâche (d_{ij})

$$\boxed{ML = (t_j - t_i) - d_{ij}}$$



REPRESENTATION DES MARGES

Dans notre exemple d'application, on a les marges suivantes :

TACHE	DEBUT au plus tôt	DEBUT au plus tard	DUREE	FIN au plus tôt	FIN au plus tard	MARGE TOTALE	MARGE LIBRE	CRITICITE Critiq	CRITICITE Subcritic
R	0	0	3	3	5	2	0		
B	0	0	4	4	4	0	0	x	
D	3	5	2	7	7	2	2		x
F	4	4	3	7	7	0	0	x	
G	3	5	3	9	13	7	3		
S	7	7	2	9	13	4	0		
A	7	7	5	12	12	0	0	x	
H	4	4	4	12	12	4	4		x
E	9	13	3	16	16	4	4		x
C	12	12	4	16	16	0	0	x	
	t_i	t'_i	d_{ij}	t_j	t'_j				

Pour évaluer la criticité à travers les marges :

→ Une tâche est critique lorsque :

Marge Totale = Marge Libre = 0

Diagramme de GANTT

Le Diagramme de GANTT est un outil utilisé souvent en complément d'un réseau "PERT" en ordonnancement et gestion de projet et permettant de visualiser dans le temps les diverses tâches composant un projet.
Il permet de représenter graphiquement l'avancement du projet.

Le concept a été développé par, l'ingénieur américain, "HENRY GANTT".

Cet outil répond à deux objectifs :

- PLANIFIER de façon optimale
- Communiquer sur le planning établi et les choix qu'il impose.

Alors, Dans un diagramme de GANTT on Représente :

- En ligne les différents postes de travail (ou les différentes tâches)
- En colonne les unités de temps (exprimées en mois, en semaine ou en jours)

La durée d'utilisation d'un poste de travail (ou la durée d'exécution d'une tâche) est matérialisée par une « barre horizontale ».

Il est également fréquent de matérialiser par des flèches, les liens de dépendance entre les taches [la flèche relie la tâche précédente à la tâche suivante].

Dans la pratique, et à la différence du PERT, le diagramme de base est souvent complété en ligne par la liste des ressources affectées à chacune des tâches ainsi que par divers indicateurs, fonction de la charge ou du délai, permettant d'en suivre l'avancement.

Le Diagramme de GANTT Permet :

- De Déterminer les dates de Réalisation d'un projet
- D'identifier les marges existantes sur certaines tâches
- de Visualiser d'un seul coup d'oeil le retard ou l'avancement des travaux.

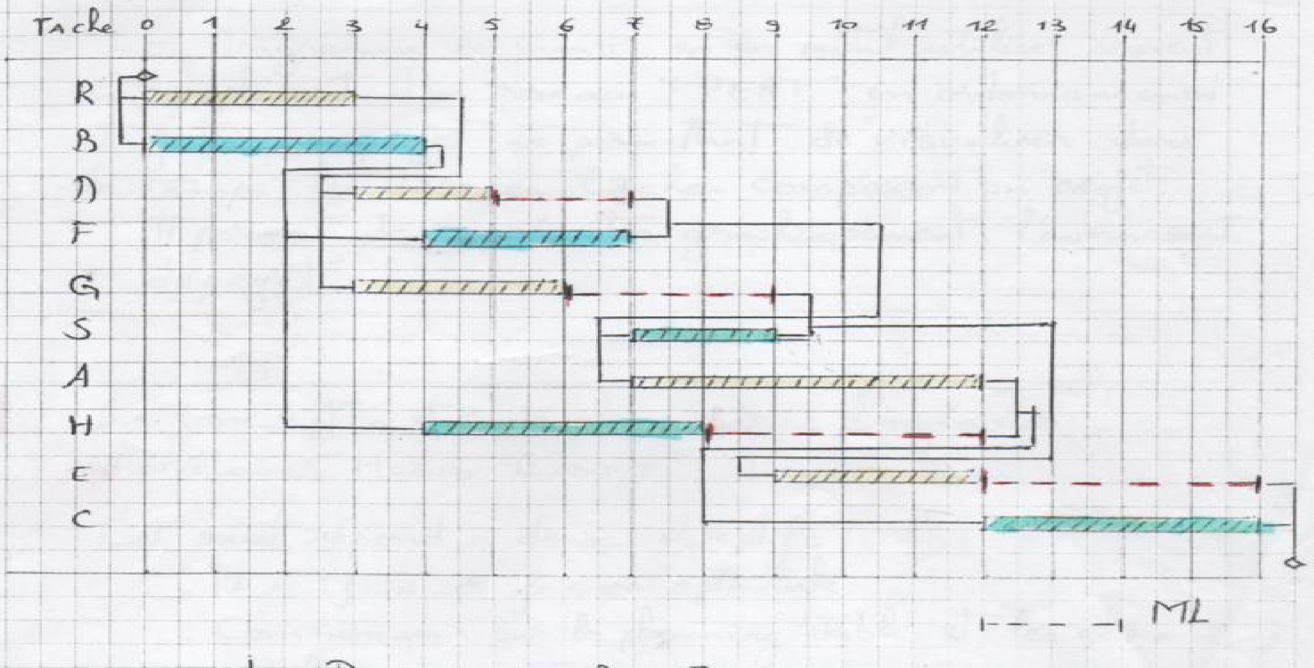
Il est souvent possible de trouver des solutions satisfaisantes en appliquant simplement des règles de priorité heuristiques.

La méthode consiste à placer les tâches à effectuer dans le diagramme de GANTT dans l'ordre défini par la priorité et en tenant compte des ressources encore disponibles.

Les Règles les plus courantes sont :

* Priorité à la réalisation des fabrications dont la date de livraison est la plus rapprochée. Logistique
* Priorité à la première commande arrivée. F.I.F.O
* Priorité aux fabrications dont la durée totale est la plus courte SPT
* Priorité aux fabrications qui utilisent le moins une Ressource critique Goulot Etranglement
* Priorité aux fabrications qui disposent du minimum de marge globale.

Dans notre Exemple d'Application :



LE DIAGRAMME DE GANTT

PERT CHARGE

Répartition des Moyens (*)

Toute tâche pour être exécutée suppose des moyens (des Ressources) en hommes, en materiel et en trésorie.

C'est pourquoi pour utiliser au mieux les moyens existants sans augmenter les effectifs en periode de pleine production, l'entreprise est amenée à rechercher des compromis en tenant compte de certaines contraintes.

En quoi le P.E.R.T va-t-il nous aider ?
Comment opérer ?

Il y a pour cela une méthode en trois phases :

1ère Phase : Rajouter sur le PERT, sous chaque tache, l'effectif nécessaire pour exécuter le travail considéré.

2ème Phase : Analyser systématiquement le réseau, heure par heure, ou jour par jour, selon l'unité de temps retenue.

3ème Phase : Adapter le réseau aux contraintes fixées par l'entreprise.

1ère PHASE :

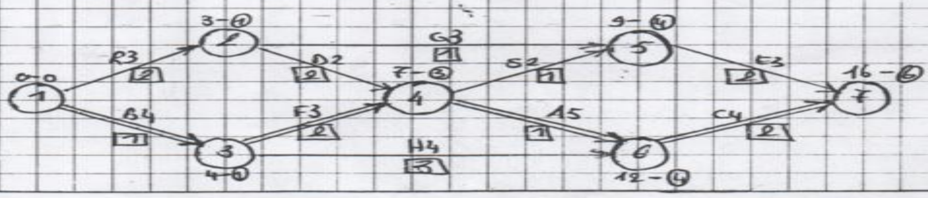
Inscription des effectifs sous chaque tâche.
Le nombre d'exécutants nécessaires pour accomplir les tâches prévues sur le réseau P.E.R.T.

Reproduisons le Réseau P.E.R.T sur lequel nous ajoutons sous chacune des tâches le nombre d'effectif.

Dans le cas de notre Exemple d'Application, On donne le Tableau suivant :

Tâches	Temps	Effectif
R	3	2
B	4	1
D	2	2
F	3	2
G	3	1
H	4	3
S	2	1
A	5	1
E	3	2
C	4	2

Par EXEMPLE :
La tâche "R" demande (2) ouvriers pendant (3 heures) pour effectuer à partir de l'étape ①.



2ème PHASE : ANALYSE du RÉSEAU

Nous supposons que l'entreprise impose les contraintes suivantes :

* Respect des délais d'achèvement découlant du chemin critique
* Niveau d'effectif à ne pas dépasser : (5 ouvriers) par heure, étant entendu qu'il n'y a aucune possibilité de faire passer un ouvrier d'un poste à un autre.

Si nous nous en tenons au réseau P.E.R.T. non modifié, devant quelle situation nous trouvons-nous ?

Etablissons un tableau à double entrée où seront indiquées en abscisse les heures, et en ordonnées les tâches.

Mais Comment disposer les tâches ?

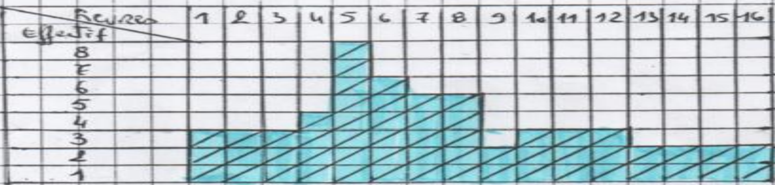
* Dans un premier temps nous porterons les tâches du chemin critique que nous ne pouvons pas déplacer
* Vérifier si la deuxième contrainte qui est le maintien du niveau d'effectif est respecté ou non.

Dans notre exemple d'application :

Nous avons un Tableau avec (16 colonnes) représentant la durée totale du travail à effectuer et les (10 tâches) figurant sur le réseau.

Nous allons mettre les tâches critiques en premier lieu, en commençant par la tâche [B] et en suivant l'ordre chronologique d'exécution, c'est-à-dire : [B, F, A, C].

Heures / Tâches	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
B	1	1	1	1												
F					2	2	2									
A								1	1	1	1	1				
C													2	2	2	2
R	2	2	2													
D				2	2											
G				1	1	1										
H					3	3	3	3								
S								1	1							
E										2	2	2				
Total	3	3	3	4	8	6	5	5	2	3	3	3	2	2	2	2



Il ressort de ces deux tableau que la 2ème contraintes, maintien du niveau d'effectif à (5 ouvriers), n'est pas respectée, les heures les plus chargées étant :
- 5ème heure avec 8 ouvriers Résultant des tâches (D-G-H).
- 6ème heure avec 6 ouvriers Résultant des tâches (G-H)

3ème PHASE

Il s'agit donc d'améliorer cette situation en jouant sur les tâches qui sont en dehors du chemin critique et qui disposent d'une marge.

Dans notre exemple d'application :

Ainsi, la tâche [H] mobilisant (3 ouvriers) pendant (4 heures) est la plus pénalisante du Réseau, en disposant d'une marge de (4 heures) nous avons la possibilité de la déplacer.

l'heure du début de la tâche [H] étant prévue, sur la figure de Réseau PERT, à (5 heures), utilisons sa marge de (4 heures) ce qui nous permet de la faire débuter à (8 heures).

Nous obtenons alors une nouvelle situation.

heures / tâches	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
B	1	1	1	1												
F					2	2	2									
A								1	1	1	1	1				
C													2	2	2	2
R	2	2	2													
D				2	2											
G				1	1	1										
H					0			3	3	3	3					
S								1	1							
E									2	2	2	→				
TOTAL	3	3	3	4	5	3	2	5	7	6	6	1	2	2	2	2
									5	4	4	3	4	4		

En jouant sur [H] nous nous trouvons avec un nouveau problème :

- à (9ème heures) avec (7 ouvriers) résultant des tâches [H/S/E]
- à (10ème heures) avec (6 ouvriers) Résultant des tâches [H/E]
- à (11ème heures) avec (6 ouvriers) Résultant des tâches [H/E]

NB : « on prend pas la tâche [A] en considération parce que elle est critique »

Déplaçons [E] en le faisant commencer à (12ème heure)

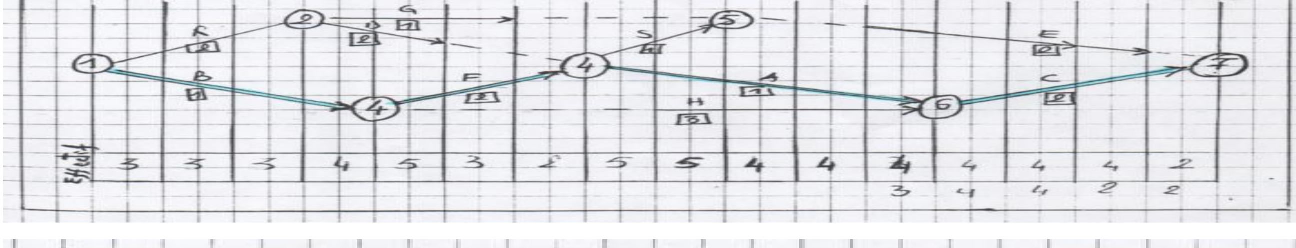
Ainsi, nous diminuons de (2 ouvriers) penant (3 heures) le nombre d'effectif présent à :

- 9ème heures, soit avec (5 ouvriers)
- 10ème heures, soit avec (4 ouvriers)
- 11ème heures, soit avec (4 ouvriers)

Mais nous augmentons de (2 unités les effectifs) présents à :

- 12ème heures, soit avec (3 ouvriers)
- 13ème heures, soit avec (4 ouvriers)
- 14ème heures, soit avec (4 ouvriers)

Après ces déplacements de [H] et de [E], dessinons le nouveau Réseau P.E.R.T en utilisant l'axe Temps :



Graphique De Repartition

PERT - COST — La Minimisation des coûts

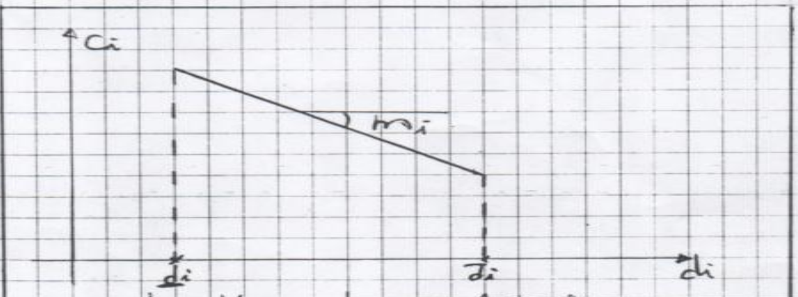
Jusqu'à présent, on a considéré la durée de chaque tâche comme **donnée**. Or la durée d'une tâche particulière "**i**" peut varier en fonction, par exemple ; de l'embauche de personnel supplémentaire, de l'achat ou de la location de matériel supplémentaire.

On voit donc que l'on pourra, en général, réduire la durée de chaque tâche **moyennant un coût supplémentaire**.

Nous allons voir ici comment arbitrer entre les deux critères :

+ diminution de la durée d'exécution des tâches et donc du chantier.
+ d'autre part, augmentation des coûts d'exécution des tâches.

Considérons la tâche "i". Sa durée d'exécution (d_i) peut varier entre une durée minimale (incompressible) ($\underline{d}_i$) et une durée maximum ($\bar{d}_i$).



Coût d'exécution de la tâche "i"

Si l'on admet que le coût varie linéairement en fonction de la durée, on obtient le graphique précédent.

Notons par (m_i) la pente. Pour une durée (d_i) comprise entre les bornes inférieure et supérieure, le coût de la tâche (i) est alors calculé par l'équation suivante :

$$\boxed{C_i(d_i) = C_i(\underline{d_i}) + m_i(d_i - \underline{d_i})}$$

Si on répète la même opération pour chacune des tâches, l'objectif de la minimisation du coût total d'exécution des tâches peut s'écrire :

$$\boxed{\begin{aligned} \min Z &= \sum_{i=1}^{n} [C_i(\underline{d_i}) + m_i(d_i - \underline{d_i})] \\ &= K + \sum_{i=1}^{n} m_i d_i \end{aligned}}$$

Le premier terme étant constant, il revient au même de minimiser le seul second terme et on obtient l'objectif suivant :

$$\boxed{\min Z' = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i}$$

Les (d_i) étant, cette fois, des variables pour le problème. Nous avons donc comme **variables** du problème :

- "t_i" : le temps de début de la tâche "i".
- "d_i" : la durée d'exécution de la tâche "i".
- "t_f" : le temps de fin de chantier.

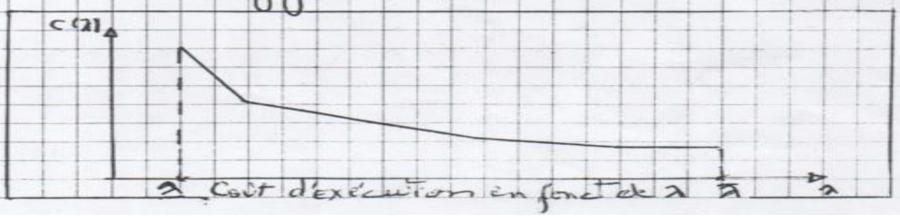
Moyennant ce choix de variables, le problème de minimisation des coûts d'exécution des tâches se formule donc comme suit :

$$\boxed{C_0(\lambda) = \min Z = \sum_{i=1}^{n} m_i\, d_i}$$

$$\begin{cases} t_i \geq t_0 & \text{(localisation temporelle)} \\ t_j \geq t_i + d_i & \text{(succession temporelle)} \\ t_f \geq t_i + d_i & \text{(fin de chantier)} \\ t_f \leq \lambda & \text{(borne sur } t_f\text{)} \\ \underline{d_i} \leq d_i \leq \bar{d_i} & \text{(bornes sur la durée)} \end{cases}$$

La borne supérieure sur (t_f) a du être ajoutée car il est clair, au vu de la forme des fonctions de coûts $c_i(d_i)$ que sinon on aura tendance à prendre $(d_i = \bar{d_i})$ pour toute tâche et donc à augmenter au maximum la durée du chantier.

On peut alors résoudre ce problème en fonction du paramètre (λ). En ajoutant le terme constant que nous avions négligé, on obtient un graphique du genre de celui représenté à la figure suivante :



Coût d'exécution en fonct de λ

Ce graphique appelle plusieurs commentaires :

1. Tout d'abord, le paramètre (λ) doit être supérieur à une certaine valeur minimum $(\underline{\lambda})$ qui correspond au temps d'exécution minimum lorsque toutes les tâches critiques sont à leur durée minimum $(\underline{d_i})$.

2. Ensuite, remarquons que la fonction $[C(\lambda)]$ est convexe, décroissante et linéaire par morceaux.

3. Enfin, à partir d'une certaine valeur $(\bar{\lambda})$ de (λ), on aura systématiquement $(d_i = \bar{d_i})$ et l'objectif devient constant.
Cette valeur $(\bar{\lambda})$ correspond au temps minimum d'exécution du projet lorsque toutes les tâches critiques sont à leur durée maximum $(\bar{d_i})$

[Signalons ici pour mémoire que la méthode "CPM", pour Critical Path Method, est fondée sur la relation (durée - coût) et a pour objectif, à partir d'une solution acceptable en termes de durée et de coût, de parvenir à :
« Une Réduction maximale de la durée, pour une augmentation minimale du Coût. »]

Methode :

1/ Mettre le Réseau en temps normal
2/ Repérer le chemin Critique
3/ Déterminer le prix du Réseau à allure normale
4/ Etablir un tableau sur le quel pour chaque tâche seront indiqués :

+ La durée optimum de la tâche
+ La durée minimum de la tâche
+ Les réductions possibles de la tâche (durée optimum - durée minimum)
+ Les coût supplémentaires dus aux réductions successives de la tache

5/ Prendre dans le tableau, ce qui coute le moins cher dans l'accélération des tâches et voir ce que l'on peut réduire.

Reprenons notre exemple, supposons les données ci-dessous connues :

Prix du Réseau à allure normale = 1500 €

Tâches	Durées Optimum	Durées Minimum	Réduction Possibles	coûts supplémentaires dus aux gains de temps en € 1ère heure	2ème heure	3ème heure
B	4	1	3	10	15	20
F	3	3	0	impossible		
A	5	3	2	15	18	impossible
C	4	2	2	5	9	impossible
R	3	3	0	impossible		
G	3	3	0	impossible		
D	2	2	0	impossible		
H	4	2	3	10	12	15
E	3	3	0	impossible		

Ce Tableau met en évidence que si nous décidons de réduire, par exemple, la tâche [B] de [3 heures], cette opération augmentera le coût de : [10 + 15 + 20 = 45 $]

Mais par contre, si nous Réduisons :

$$\left\{ \begin{bmatrix} B = 1h \\ A = 1h \\ C = 1h \end{bmatrix} \right.$$

Cela coûtera [10 + 15 + 5 = 30 $]

1ère Réduction :

[C = 1 heure , Coût = 5 $]

Durée Totale (15 heures) au lieu de (16 heures)

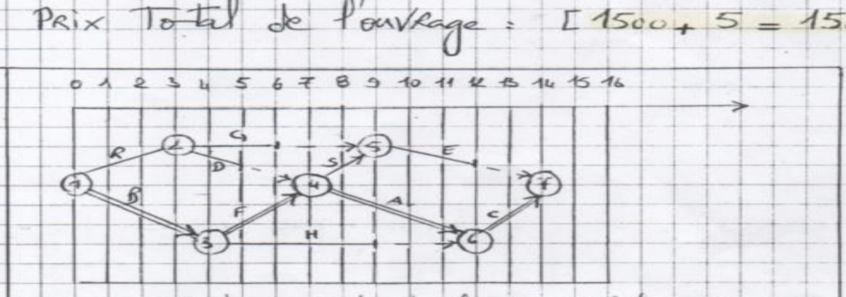
Conséquences (fig suivante)

[C] qui était de (4 heures) passe à (3 heures).
Dans le PERT, toutes les tâches qui sont au-delà de l'étape (6) seront réduites obligatoirement d'une heure.

En effet, Ramenant la durée de 16 heures à 15 heures, l'étape [7] se positionne sur le fuseau (15)

Par contre, les étapes [5] et [6] se maintiennent sur leur fuseau d'origine : [9 et 12], nous Vérifions facilement que [C] diminue d'une heure et que [E] ne dispose plus que de trois heures de marge.

Prix Total de l'ouvrage : [1500 + 5 = 1505 $]



Réduction de la Tâche C (2e heure)

2ème Réduction :

[C = -1h = 9$] puisque il s'agit de la 2ème h

Donc la durée Totale est = (14 heures)

Conséquences :

La tâche "C" passe de [3 heures à 2 heures]

L'étape [7] passe au fuseau 14.

La tâche "E" marge libre = 2 heures

Prix Total de l'ouvrage : [1505 + 9 = 1514 $]

3ème Réduction :

[B = -1heure = 10 $]

Donc la durée Totale est devenu [13 heures]

Conséquences :

La tache [B] passe de [4 heures à 3 heures]

- L'étape 3 sur le fuseau "3".
- L'étape 4 sur le fuseau "6".
- L'étape 5 sur le fuseau "8"
- L'étape 6 sur le fuseau "11"
- L'étape 7 sur le fuseau "13"

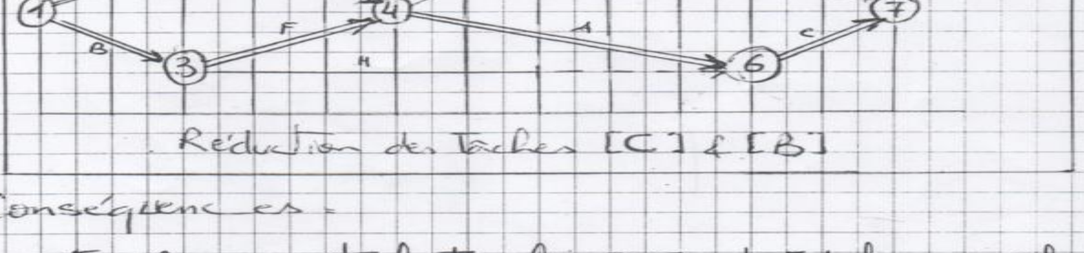
Marge de [D] = 1 heure

Marge de [G] = 2 heures

Prix Total après la 3ème Réduction : [1514 + 10 = 1524 $]

4ème Réduction : [B = -1 heure = 15 $]

Durée Totale égale à [12 heures], soit, après les 2ème, 3ème et 4ème Réductions, le Réseau suivant.



Réduction des Tâches [C] & [B]

Conséquences :

En Ramenant la tâche [B] de [4 heures à 2 heures], le déplacement de l'étape 3 entraîne le déplacement de l'étape 4 qui en Reculant mange la dernière marge de [D], ce qui augmente les tâches critiques.

En effet, deux Chemins apparaissent critique sur le Réseau [R, D, A, C] & [B, F, A, C].

Nous pouvons donc Retenir qu'au fur et à mesure que les marges s'annulent de nouveaux Chemins Critiques apparaissent.

Prix de l'ouvrage : [1524 + 15 = 1539 $]

Les Contraintes de Capacité

PERT Probabiliste

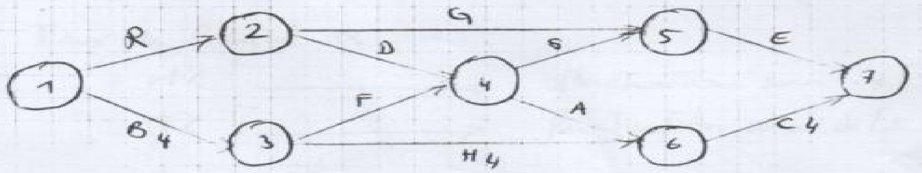
la Méthode PERT, qui a été présentée dans ce qui passé dans le cas de tâches de durées Connues à l'avance, c'est à dire Déterministe

PERT Probabiliste, a été développé pour prendre en compte des tâches dont on ne connaît pas les durées exactes à l'avance, ce qui est souvent le cas en réalité;

Ainsi que, Pour raison d'Aléas qui viennent souvent perturber le bon déroulement de projet.

Le PERT Probabiliste, permet alors d'obtenir une Estimation de la durée du projet.

Nous considerons le graphe Pert de Notre exemple



On va supposer pour commencer que les durées des taches suivent une loi béta, ce qui permet d'estimer les moyennes et Variances des durées des taches.

Pour cela est nécessaire de connaître trois durées pour chaque tâche :

- Durée Optimiste [la durée Minimale D_{opt}]
- Durée la plus Probable [D_{Prob}]
- Durée Pessimiste [la durée Maximale D_{Pes}]

On peut Alors Calculer une Estimation "t" de la moyenne et "v" de la Variance.

tel que :

$$\left[t = \frac{D_{opt} + 4 D_{Prob} + D_{Pes}}{6} \right]$$

&

$$\left[v = \left(\frac{D_{pes} - D_{opt}}{6} \right)^2 \right]$$

On Souhaite maintenant déterminer la probabilité (proportion) que le Projet se termine en une durée donnée.

Pour cela on fait maintenant l'hypothèse que :

La Durée du Projet a une moyenne "μ" et un écart type "σ" suit une loi normale.

Tel que pour Atteindre la fin de projet dans une date "X".

On a la propabilité récupéré du Tableau loi Normale

Tel que :

$$\left[\; Z = \frac{X - t}{\sigma} \;\right]$$

, "Z" est Positif :

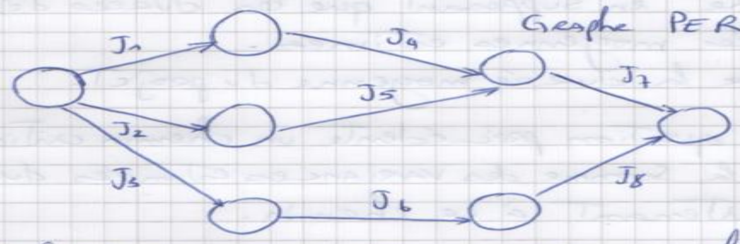
donc : $\left[(0.5) + \Phi(Z) \right]$

Si : (+) "Z" est NEGATIF :

donc : $\left[\Phi(Z) \right]$ & en ignorant le signe

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

Exemple d'application :



On va supposer pour commencer que les durées des tâches suivent une loi bêta ce qui permet d'estimer les moyennes et variances des durées des tâches. pour cela il est nécessaire de connaître trois durée pour chaque tâche :
- la durée minimale a
- la durée la plus probable m
- la durée maximale b

ces durées sont (semaines)

Tâches	a	m	b
J_1	4	8	10
J_2	2	4	6
J_3	4	7	11
J_4	2	3	5
J_5	6	8	11
J_6	1	2	3
J_7	1	3	4
J_8	4	5	7

On peut alors calculer une estimation "t" de la moyenne et "v" de la variance par :

$$t = \frac{a + 4m + b}{6}$$

$$v = \left(\frac{b - a}{6}\right)^2$$

① Calculer des estimations des moyennes et variances des durées des tâches ?

(2) Déterminer les dates de début au plus tôt et au plus tard de chaque tâche, en supposant que les durées d'exécution sont les durées moyennes estimées.
En déduire la durée moyenne du projet.

(3) Déduire de la question précédente un chemin critique, puis calculer la somme des variances estimées dues durée des tâches appartenant à ce chemin.

(4) Quelle est la probabilité que le projet dure 17 semaine ?
Quelle est la probabilité que le projet dure 12 semaine ?

Réponse :

$\boxed{1}$ En appliquant les formules :

Tâche	t	v
J_1	$23/3$	1
J_2	4	$4/9$
J_3	$43/6$	$49/36$
J_4	$19/6$	$1/4$
J_5	$43/6$	$25/36$
J_6	2	$1/9$
J_7	$17/6$	$1/4$
J_8	$31/6$	$1/4$

$\boxed{2}$ On calcule : * date au plus tôt (r_i)
* la durée moyenne de proj [Maximum date de fin au plus tôt]
* date au plus tard : (f_i)

Tâches	r_i	f_i
J_1	0	$4/3$
J_2	0	0
J_3	0	$2/3$
J_4	$23/3$	[illegible]
J_5	4	4
J_6	$43/6$	$47/6$
J_7	$73/6$	$73/6$
J_8	$55/6$	$59/6$

date de fin au plus tôt des tâche J_7 et J_8

$$\begin{cases} \frac{73}{6} + \frac{17}{6} = 15 \\ \frac{55}{6} + \frac{31}{6} = \frac{43}{3} \end{cases}$$

le projet a une durée moyenne de 15 semaine

$\boxed{3}$ le chemin $[J_2, J_5, J_7]$ est critique puisque les tâches de ce chemin sont telles que : $(r_i = f_i)$
– La somme des variances estimées pour ces tâches vaut $\left[\frac{4}{9} + \frac{25}{36} + \frac{1}{4} = \frac{25}{18} \right]$

$\boxed{4}$ on a :
durée moyenne : $\mu = 15$
l'écart-type : $\sigma = \sqrt{v} = \sqrt{25/18} = \frac{5}{3\sqrt{2}}$

→ Dans le premier cas $[X = 17]$

$$Z = \frac{17 - 15}{\frac{5}{3\sqrt{2}}} = 1{,}70$$

la valeur dans la table $(0{,}4550)$ [ligne 1,70 colonne 0,00
Donc la probabilité que le projet dure au plus 17 semaine est $(0{,}9554)$.

→ Dans le second cas :

$$Z = \frac{12 - 15}{\frac{5}{3\sqrt{2}}} = -2{,}55$$

Ainsi : la probabilité que le projet dure au plus 12 semaines est $(0{,}4946)$.

parce que
[ligne 2,50
colonne 0,05