CHAPITRE - 1 -

Le corps des Réels.

Nous allons décrire l'ensemble des nombres réels de manière axiomatique - par ses propriétés comme suit :

1/ IR est un corps commutatif :

on a la définition suivantes

1-1 - Définition : Un corps commutatif est un ensemble muni de deux opérations binaires rendant possible les quatres opérations algébrique $(+ ; \div , \times , -)$.

1-2 - Définition :

On dit que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif si il vérifie les conditions suivantes :

I) $(\mathbb{R}, +)$ un groupe, c.à.d :

1)- $(+)$ est une lois interne, c.à.d :

$\forall x, y \in \mathbb{R} : x+y \in \mathbb{R}$.

2) - $(+)$ est commutatif ; c.à.d :

$\forall x, y \in \mathbb{R} , x+y = y+x$

3) $(+)$ est associative : c.à.d :

$\forall a, b, c \in \mathbb{R} ; \quad (a+b)+c = a+(b+c)$.

4) $(+)$ admet un élément neutre c'est " 0 : zero " : c.à.d :

$\forall a \in \mathbb{R} : \ a+0 = a$.

5) $(+)$ admet un élément symétrique (l'opposé) : c.à.d :

$\forall a \in \mathbb{R} ; \exists b \in \mathbb{R} : a+b = 0$ dont : $b = (-a)$.

$(\mathbb{R}, +)$ est dite groupe abelien (commutatif).

Le corps des Réels :

Nous allons décrire l'ensemble des nombres réels de manière axiomatique - par ses propriétés comme suit :

1/ IR est un corps commutatif :

on a la définition suivantes

1.1 - Définition : Un corps commutatif est un ensemble muni de deux opérations binaires rendant possible les quatres opérations algébrique $(+ ; \div , \times , -)$.

1-2- Définition :

On dit que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif si il vérifie les conditions suivantes ;

I) $(\mathbb{R}, +)$ un groupe, c.à.d :

1)- $(+)$ est une lois interne, c.à.d :

$\forall x, y \in \mathbb{R} : x+y \in \mathbb{R}$.

2) - $(+)$ est commutatif ; c.à.d :

$\forall x, y \in \mathbb{R} , x+y = y+x$

3) $(+)$ est associative : c.à.d :

$\forall a, b, c \in \mathbb{R} ; (a+b)+c = a+(b+c)$.

4) $(+)$ admet un élément neutre c'est " 0 : zero " : c.à.d :

$\forall a \in \mathbb{R} : a+0 = a$

5) $(+)$ admet un élément symétrique (l'opposé) : c.à.d :

$\forall a \in \mathbb{R} ; \exists b \in \mathbb{R} : a+b = 0$ dont : $b = (-a)$.

$(\mathbb{R}, +)$ est dit groupe abelien (commutatif).

Scanné avec CamScanner

II) $(\mathbb{R}\setminus\{0\}; \times)$ forme un groupe abélien, dont l'élément neutre est " 1 ";

III) La multiplication est distributive pour l'addition; c.à.d:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}; \quad a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c).$$

2) <u>IR est un corps totalement ordonné</u>:

2-1 / <u>Définition</u>: un corps ordonné est un corps commutatif muni d'une relation d'ordre (notée $\leq$ en général) compatible avec la structure de corps.

2-2 / <u>Définition</u>: (IR est un corps ordonné):

on a: sur IR; la relation $(\leq)$ est une relation d'ordre total, ce qui signifie que deux éléments quelconques de IR sont comparables ~~est~~ et on écrit dans ce cas:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x \leq y \quad \text{ou bien} \quad y \leq x.$$

2-3 / <u>Définition</u>:

la relation d'ordre $(\leq)$ est compatible avec la structure corps de $(\mathbb{R}; +; \times)$ ce qui signifie:

a/ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: (x \leq y) \Leftrightarrow (x + z \leq y + z)$

en particulier:

$$(x \leq y) \Leftrightarrow (y - x \geq 0).$$

b/ $\forall x, y \in \mathbb{R}: \forall z \in \mathbb{R}_+^*$:

$$[x \leq y \Leftrightarrow xz \leq y \cdot z]$$

<u>Définitions</u>:

soit E un ensemble. // ici: $E = \mathbb{R}$; et $R = \leq$

1/ <u>une relation R</u> sur E: ~~est~~.

soit E un sous-ensemble de l'ensemble produit $E \times E$

$\forall (x,y) \in E \times E$: on dit que x est en relation avec y :
et on note par : $[x R y]$: pour dire que $(x,y) \in R$
ici :

R sur E est un sous-ensemble de l'ensemble produit $E \times E$
dont :

pour $(x,y) \in E \times E$, on dit que $(x,y) \in R$

Exemple :

soit E l'ensemble défini par :

$E = \{0, 3, 5, 6, 8, 9, 11\}$

et soit la relation R défini par :

$(x,y) \in E \times E$: $x R y \overset{}{\Leftrightarrow} x = y + 3$

donc :

$R = \{(3,0), (6,3), (8,5), (11,8), (9,6)\}$

2/ une relation R est une relation d'ordre si :

i/ R est réflexive $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $x R x$.

ii/ R est antisymétrique : c.à.d :

$\forall x,y \in E : [x R y \text{ et } y R x] \Rightarrow x = y$.

iii/ R est transitive : c.à.d :

$$\forall x,y,z \in E : \begin{cases} x R y \\ \text{et} \\ y R z \end{cases} \Longrightarrow x R z.$$

3/ une relation d'ordre R sur un ensemble E totale si

$\forall x,y \in E$ on a : $x R y$ ou $y R x$, on dit aussi que
$(E; R)$ est un ensemble totalement ordonné.

Exemple :

La relation " $\leq$ " sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre total.

Nous avons donc ;

1/ $\forall x \in \mathbb{R}$: $x \leq x$ ...... (Réflexive).

2/ $\forall x, y \in \mathbb{R}$; si $\begin{cases} x \leq y \\ \text{et} \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow x = y$ .... (anti-symétrique)

3/ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$: si $\begin{cases} x \leq y \\ \text{et} \\ y \leq z \end{cases} \Rightarrow x \leq z$ .... (transitive).

3/ $\mathbb{R}$ est un corps archimédien.