Chapitre 3

Les suites numériques

2.1 Préliminaires

Définition 2.1.1 *Soit $E \neq \varnothing$. Toute fonction f définie de $\mathbb{N}$ vers E est appelée suite des éléments de E.*

Remarque 2.1.1

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$. L'image de n par la fonction f est notée par u_n.*
2. *u_n est appelé le terme général de la fonction f.*
3. *La fonction f est notée par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n).*

Définition 2.1.2 *Si $E = \mathbb{R}$ alors (u_n) est appelée suite numérique.*

Remarque 2.1.2 *On peut définir (donner) une suite par plusieurs manières :*

1. *Formule explicite : Exprimer u_n en terme de n. Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = n$.*
2. *Propriété : Donner une caractérisation des termes de la suite (u_n). Par exemple, u_n représente le $n^{ème}$ entier premier.*
3. *Relation de récurrence : Donner le premier terme et u_{n+1} en fonction de u_n. Par exemple,* $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = u_n + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Remarque 2.1.3 *Ils existent des suites qui ne sont pas définies sur tout $\mathbb{N}$. En général, elles sont définies a partir d'un certain rang c'est à dire $(u_n)_{n\geq n_0}$, où $n_0 \in \mathbb{N}$. Par exemple, la suite $\left(\frac{1}{n(n-1)(n-2)}\right)$ est définie pour $n \geq n_0 = 3$.*

Définition 2.1.3 *L'ensemble $A = \{u_n : n \geq n_0\}$ est appelé l'ensemble des valeurs de la suite (u_n).*

Exemple 18 *Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = -1$ alors l'ensemble des valeurs de (u_n) est $A = \{-1\}$.*

Définition 2.1.4 *Soit $a \in \mathbb{R}$. La suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = a$ est appelée la suite constante (a).*

Exemple 19 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = 1$, alors (u_n) est la suite constante (1).*

Définition 2.1.5 *La suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 0$ est appelée la suite nulle.*

2.1.1 Opérations algébriques sur les suites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques.

Définition 2.1.6 *La somme de (u_n) et (v_n) est la suite numérique dont le terme général est $u_n + v_n$, c'est à dire $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$.*

Exemple 20 *On a $\left(\frac{n+1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n+1}{n} + \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n+2}{n}\right)$.*

Définition 2.1.7 *Le produit de (u_n) et (v_n) est la suite numérique dont le terme général est $u_n.v_n$, c'est à dire $(u_n).(v_n) = (u_n.v_n)$.*

Exemple 21 *On a $\left(\frac{n+1}{n}\right).\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n+1}{n}.\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n+1}{n^2}\right)$.*

Définition 2.1.8 *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le produit de (u_n) par λ est la suite numérique dont le terme général est λu_n, c'est à dire $\lambda.(u_n) = (\lambda.u_n)$.*

Exemple 22 *On a $4\left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(4\frac{n+1}{n}\right) = \left(\frac{4n+4}{n}\right)$.*

Définition 2.1.9 *Si pour tout n on a $v_n \neq 0$ alors la dévision de (u_n) sur (v_n) est la suite numérique dont le terme général est $\frac{u_n}{v_n}$, c'est à dire $\frac{(u_n)}{(v_n)} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.*

Exemple 23 *On a $\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{1}{n}}\right) = (n+1)$.*

Définition 2.1.10 *Si pour tout n on a $u_n \neq 0$ alors l'inverse de la suite (u_n) est la suite numérique dont le terme général est $\frac{1}{u_n}$, c'est à dire $\frac{1}{(u_n)} = \left(\frac{1}{u_n}\right)$.*

Exemple 24 *On a $\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)} = \left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right) = (n)$.*

Exemple 19 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = 1$, alors (u_n) est la suite constante (1).*

Définition 2.1.5 *La suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 0$ est appelée la suite nulle.*

2.1.1 Opérations algébriques sur les suites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques.

Définition 2.1.6 *La somme de (u_n) et (v_n) est la suite numérique dont le terme général est $u_n + v_n$, c'est à dire $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$.*

Exemple 20 *On a $\left(\frac{n+1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n+1}{n} + \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n+2}{n}\right)$.*

Définition 2.1.7 *Le produit de (u_n) et (v_n) est la suite numérique dont le terme général est $u_n.v_n$, c'est à dire $(u_n).(v_n) = (u_n.v_n)$.*

Exemple 21 *On a $\left(\frac{n+1}{n}\right).\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n+1}{n}.\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n+1}{n^2}\right)$.*

Définition 2.1.8 *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le produit de (u_n) par λ est la suite numérique dont le terme général est λu_n, c'est à dire $\lambda.(u_n) = (\lambda.u_n)$.*

Exemple 22 *On a $4\left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(4\frac{n+1}{n}\right) = \left(\frac{4n+4}{n}\right)$.*

Définition 2.1.9 *Si pour tout n on a $v_n \neq 0$ alors la dévision de (u_n) sur (v_n) est la suite numérique dont le terme général est $\frac{u_n}{v_n}$, c'est à dire $\frac{(u_n)}{(v_n)} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.*

Exemple 23 *On a $\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{1}{n}}\right) = (n+1)$.*

Définition 2.1.10 *Si pour tout n on a $u_n \neq 0$ alors l'inverse de la suite (u_n) est la suite numérique dont le terme général est $\frac{1}{u_n}$, c'est à dire $\frac{1}{(u_n)} = \left(\frac{1}{u_n}\right)$.*

Exemple 24 *On a $\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)} = \left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right) = (n)$.*

2.1.2 Suites numériques de signe constant

Soit (u_n) une suite numérique.

Définition 2.1.11 *On dit que (u_n) est positive si $u_n \geq 0$ pour tout n.*

Exemple 25 *On considère la suite numérique dont le terme général est $u_n = n^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = n^2 \geq 0$, alors (u_n) est positive.*

Définition 2.1.12 *On dit que (u_n) est strictement positive si $u_n > 0$ pour tout n.*

Exemple 26 *On considère la suite numérique dont le terme général est $u_n = n + 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = n + 1 \geq 1 > 0$, alors (u_n) est strictement positive.*

Définition 2.1.13 *On dit que (u_n) est négative si $u_n \leq 0$ pour tout n.*

Exemple 27 *On considère la suite numérique dont le terme général est $u_n = -n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = -n \leq 0$, alors (u_n) est négative.*

Définition 2.1.14 *On dit que (u_n) est strictement négative si $u_n < 0$ pour tout n.*

Exemple 28 *On considère la suite numérique dont le terme général est $u_n = \frac{-1}{n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = -\frac{1}{n} < 0$, alors (u_n) est strictement négative.*

Remarque 2.1.4 *Ils existent des suites qui n'ont pas un signe constant. Par exemple, la suite $((-1)^n)$ n'a pas un signe constant. En effet, ils existent des termes positifs et d'autres négatifs.*

2.1.3 Suites numériques bornées

Soit (u_n) une suite numérique.

Définition 2.1.15 *On dit que (u_n) est majorée si*

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n : u_n \leq M.$$

Exemple 29 *On considère la suite numérique dont le terme général est* $u_n = \frac{1}{n}$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $u_n = \frac{1}{n} \leq 1$, *alors* (u_n) *est majorée par* 1.

Définition 2.1.16 *On dit que* (u_n) *est minorée si*

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n : m \leq u_n.$$

Exemple 30 *Soit* $u_n = \frac{1}{n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $u_n = \frac{1}{n} \geq 0$, *alors* (u_n) *est minorée par* 0.

Définition 2.1.17 *On dit que* (u_n) *est bornée si elle est majorée et minorée.*

Exemple 31 *Soit* $u_n = \frac{1}{n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$. *Cette suite est bornée car elle est majorée et minorée.*

Remarque 2.1.5 *La suite* (u_n) *est majorée si et seulement si l'ensemble de ces valeurs est majoré. La suite* (u_n) *est minorée si et seulement si l'ensemble de ces valeurs est minoré. La suite* (u_n) *est bornée si et seulement si l'ensemble de ces valeurs est borné (Pourquoi).*

Lemme 2.1.1 *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. (u_n) *est bornée.*
2. $\exists M > 0, \forall n : |u_n| \leq M$.

Application

La suite $((-1)^n)$ est bornée car pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_n| = |(-1)^n| = 1$. Donc, on peut prendre $M = 1$.

2.2 Suites numériques convergentes

Définition 2.2.1 *Soit (u_n) une suite numérique et $l \in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) converge vers l (ou tend vers l) quand n tend vers l'infini, et on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$$

Remarque 2.2.1 *Puisque*

$$|u_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon \Leftrightarrow u_n \in \left]l - \varepsilon, l + \varepsilon\right[$$

alors la définition ci-dessus signifie que pour tout réel strictement positif ε il existe un entier N (rang) telle que tous les termes $u_N, u_{N+1}, u_{N+2}, \ldots$ sont dans l'intervalle $\left]l - \varepsilon, l + \varepsilon\right[$.

Remarque 2.2.2 *En général, on peut trouver N qui vérifie*

$$n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

comme suit :

1. *On essaye de trouver une fonction f telle que $|u_n - l| \leq f(n)$. (En général, $f(n) = \frac{k}{n^m}$ avec $k, m \geq 0$).*
2. *Puis établir l'équivalence*
$$f(n) < \varepsilon \Leftrightarrow n > g(\varepsilon)$$
   où g est une fonction appropriée.
3. *Ainsi la solution est $N = \max(0, E(g(\varepsilon)) + 1)$.*

Justification : Vérifions que $N = \max(0, E(g(\varepsilon)) + 1)$ vérifie

$$n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$$

Soit $n \geq N = \max(0, E(g(\varepsilon)) + 1)$ alors $n \geq E(g(\varepsilon)) + 1$ car $\max(0, E(g(\varepsilon)) + 1) \geq E(g(\varepsilon)) + 1$, mais $E(g(\varepsilon)) + 1 > g(\varepsilon)$ alors $n > g(\varepsilon)$ si on utilise l'équivalence (b) on trouve $f(n) < \varepsilon$ mais, de (a), $|u_n - l| \leq f(n)$ alors $|u_n - l| < \varepsilon$.

Exemple 32 *La suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est convergente vers zéro. En effet,*

1. $|u_n - l| = \left|\frac{1}{n+1} - 0\right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} = f(n)$.
2. $f(n) = \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} = g(\varepsilon)$.
3. $N = \max(0, E(g(\varepsilon)) + 1) = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$.

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1 \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Exemple 33 *Soit $a \in \mathbb{R}$. La suite constante (a) est convergente vers a. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_n - l| = |a - a| = 0$ donc $|u_n - l| = 0 < \varepsilon$ est vérifie pour tout $n \geq 0$ alors $N = 0$ ce qui implique que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = 0, \forall n : n \geq 0 \Longrightarrow |u_n - l| < \epsilon.$$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} a = a$.

Définition 2.2.2 *On dit que* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ *si*

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N \Longrightarrow u_n > A.$$

Remarque 2.2.3 *Cette définition signifie que pour tout réel strictement positif A il existe un entier N (rang) telle que tous les termes $u_N, u_{N+1}, u_{N+2}, \ldots$ sont dans l'intervalle $]A, +\infty[$.*

Exemple 34 *On a* $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$*. En effet, si* $n \geq E(A)+1$ *alors* $n > A$ *(car* $E(A)+1 > A$*) donc* $u_n = n > A$ *alors* $N = E(A)+1$*. Ce qui implique que*

$$\forall A > 0, \exists N = E(A)+1 \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N \Longrightarrow u_n = n > A.$$

Définition 2.2.3 *On dit que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ *si*

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N \Longrightarrow u_n < -A.$$

Remarque 2.2.4 *Cette définition signifie que pour tout réel strictement positif* A *il existe un entier* N *(rang) telle que tous les termes* $u_N, u_{N+1}, u_{N+2}, \ldots$ *sont dans l'intervalle* $]-\infty, -A[$.

Exemple 35 *On a* $\lim_{n\to+\infty} -n = -\infty$*. En effet, si* $n \geq E(A)+1$ *alors* $n > A$ *donc* $u_n = -n < -A$ *donc* $N = E(A)+1$*. Alors*

$$\forall A > 0, \exists N = E(A)+1 \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N \Longrightarrow u_n = -n < -A.$$

Définition 2.2.4 *Une suite est dite convergente s'il existe* $l \in \mathbb{R}$ *telle que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.

Exemple 36 *Toute suite constante* (a) *est convergente car* $\lim_{n\to+\infty} a = a \in \mathbb{R}$.

Définition 2.2.5 *La suite numérique* (u_n) *est dite divergente si elle n'est pas convergente c'est à dire*

$$\forall l \in \mathbb{R} : \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n : n \geq N \wedge |u_n - l| \geq \varepsilon.$$

Exemple 37 *La suite* (n) *est divergente car* $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \notin \mathbb{R}$.

Remarque 2.2.5 *Il y'a deux types de divergence :*

1. *Divergence de type infini : suite qui a une limite infinie. Par exemple, la suite de terme général* $u_n = n$.

2. *Divergence de type limite n'existe pas : suite qui n'a pas de limite finie ou infinie. Par exemple, la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ n'a pas une limite finie ou infinie. En effet,*

   (a) *Elle n'a pas une limite finie. Par absurde, on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n = l \in \mathbb{R}$ alors pour $\varepsilon = \frac{1}{3}$ on trouve $N \in \mathbb{N}$ telle que si $n \geq N$ alors $u_n \in \left]l-\frac{1}{3}, l+\frac{1}{3}\right[$ donc $-1, 1 \in \left]l-\frac{1}{3}, l+\frac{1}{3}\right[$ ce qui représente une contradiction.*

   (b) *Elle n'a pas une limite infinie. Par l'absurde, on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n = -\infty$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n = +\infty$ pour $A = 1$ on trouve $N \in \mathbb{N}$ telle que si $n \geq N$ alors $u_n \in]A, +\infty[$ donc $-1 \in]A, +\infty[$ ce qui représente une contradiction.*

   De même, on obtient une contradiction dans le cas où $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n = -\infty$.

2.2.1 Propriétés des suites convergentes

Théorème 2.2.1 *La limite d'une suite convergente est unique.*

Preuve 12 *On suppose que (u_n) admet deux limites différentes l_1 et l_2. Alors pour $\varepsilon = \frac{|l_1-l_2|}{2} > 0$ on a*

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N_1 \Longrightarrow |u_n - l_1| < \frac{|l_1 - l_2|}{2}$$

et

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N_2 \Longrightarrow |u_n - l_2| < \frac{|l_1 - l_2|}{2}.$$

Donc, si $n \geq \max(N_1, N_2)$ on trouve $|l_1 - l_2| = |(u_n - l_2) - (u_n - l_1)| \leq |u_n - l_2| + |u_n - l_1| < \frac{|l_1-l_2|}{2} + \frac{|l_1-l_2|}{2} = |l_1 - l_2|$, c'est à dire $|l_1 - l_2| < |l_1 - l_2|$ ce qui représente une contradiction.

Théorème 2.2.2 *Toute suite convergente est bornée.*

Preuve 13 *Soit (u_n) une suite convergente vers l alors pour $\varepsilon = 1$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$ alors $l - 1 < u_n < l + 1$ donc l'ensemble $\{u_N, u_{N+1}, \ldots\}$ est borné.*

D'autre part, l'ensemble $\{u_0, u_1, ..., u_{N-1}\}$ est borné (Pourquoi). Alors, l'ensemble des valeurs de la suite (u_n) donné par $\{u_0, u_1, ..., u_{N-1}, u_N, u_{N+1}, ...\} = \{u_0, u_1, ..., u_{N-1}\} \cup \{u_N, u_{N+1}, ...\}$ est borné.

Remarque 2.2.6 *La réciproque est fausse. En effet, il existent des suites bornées non convergentes. Par exemple, la suite $((-1)^n)$ est bornée mais elle n'est pas convergente.*

2.2.2 Opérations algébriques sur les limites des suites

Théorème 2.2.3 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques.*

1. *Si (u_n) et (v_n) sont convergentes, respectivement, vers l et l'. Alors $(u_n + v_n)$ et $(u_n.v_n)$ sont convergentes, respectivement, vers $l + l'$ et $l.l'$.*
2. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La suite (λu_n) est convergente vers $\lambda.l$.*
3. *On suppose que $u_n \neq 0$ pour tout n. Si (u_n) est convergente vers $l \neq 0$ alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est convergente vers $\frac{1}{l}$.*
4. *Si (u_n) est convergente vers l et (v_n) est une suite telle que $v_n \neq 0$ pour tout n, de plus, elle est convergente vers $l' \neq 0$ alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est convergente vers $\frac{l}{l'}$.*

Preuve 14 *1. Au début, on remarque que $|(u_n + v_n) - (l + l')| = |(u_n - l) + (v_n - l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'|$. Soit $\varepsilon > 0$. Si on applique la définition de la convergence de (u_n) et de (v_n) sur $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ on trouve $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ telles que*

$$\forall n : n \geq N_1 \Longrightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\forall n : n \geq N_2 \Longrightarrow |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N}$ et soit $n \in \mathbb{N}$ telle que $n \geq N$ alors $|(u_n + v_n) - (l + l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. C'est à dire, on a démontré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N \Longrightarrow |(u_n + v_n) - (l + l')| < \varepsilon.$$

Ce qui implique que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = l + l'$ *alors* $(u_n + v_n)$ *est convergente vers* $l + l'$.

Montrons que $(u_n.v_n)$ *est convergente vers* $l.l'$. *Puisque* (v_n) *est convergente alors elle est bornée donc il existe* $M > 0$ *telle que* $|v_n| \leq M$ *pour tout* n. *D'autre part, pour tout* n *on a* $u_n.v_n - l.l' = (u_n - l).v_n + (v_n - l')\,l$, *alors*

$$\begin{aligned} |u_n.v_n - l.l'| &= |(u_n - l).v_n + (v_n - l')\,l| \\ &\leq |u_n - l|\,|v_n| + |l|\,|v_n - l'| \leq M\,|u_n - l| + |l|\,|v_n - l'|. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. *Si on applique la définition de la convergence de* (u_n) *et de* (v_n), *respectivement, sur* $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2M}$ *et* $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2|l|}$ *on trouve* $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ *telles que*

$$\forall n : n \geq N_1 \Longrightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

et

$$\forall n : n \geq N_2 \Longrightarrow |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2\,|l|}.$$

Si $n \geq N = \max(N_1, N_2)$ *alors* $n \geq N_1$ *et* $n \geq N_1$ *d'où* $|u_n.v_n - l.l'| < M\frac{\varepsilon}{2M} + |l|\,\frac{\varepsilon}{2|l|} = \varepsilon$. *C'est à dire on a démontré que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N \Longrightarrow |u_n.v_n - l.l'| < \varepsilon.$$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n.v_n = l.l'$.

2. *Pour montrer que* (λu_n) *est convergente vers* $\lambda.l$, *il suffit d'appliquer le résultat précédent sur la suite constante* (v_n) *définie par* $v_n = \lambda$ *pour tout* n. *Cette suite est convergente vers* λ.

3. *Au début, on remarque que* $\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| = \left|\frac{l - u_n}{l u_n}\right| = |u_n - l|\,\frac{1}{|l||u_n|}$. *Mais si on applique la définition de la convergence de* (u_n) *sur* $\varepsilon_1 = \frac{|l|}{2}$ *on trouve* $N_1 \in \mathbb{N}$ *telle que pour tout* $n \geq N_1$ *on a* $|u_n - l| < \frac{|l|}{2}$ *mais* $|l| - |u_n| = -(|u_n| - |l|) \leq ||u_n| - |l|| \leq |u_n - l|$,

alors si $n \geq N_1$ on a $|l| - |u_n| < |u_n - l| < \frac{|l|}{2}$, ce qui implique que $\frac{|l|}{2} < |u_n|$ donc $\frac{1}{|l||u_n|} < \frac{2}{|l|^2}$. Ceci implique que pour tout $n \geq N_1$ on a $\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| = |u_n - l| \frac{1}{|l||u_n|} < |u_n - l| \frac{2}{|l|^2}$. Soit $\varepsilon > 0$, si on applique la définition de la convergence (u_n) sur $\varepsilon_2 = \frac{|l|^2 \varepsilon}{2}$ on trouve $N_2 \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \geq N_2$ on a $|u_n - l| < \frac{|l|^2\varepsilon}{2}$.

4. *Si $n \geq N = \max(N_1, N_2)$ alors $\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| < \frac{|l|^2\varepsilon}{2} \frac{2}{|l|^2} = \varepsilon$. C'est à dire, on a démontré que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N \Longrightarrow \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| < \varepsilon,$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$.

5. *Il suffit de remarquer que $\frac{u_n}{v_n} = u_n . \frac{1}{v_n}$ puis d'appliquer 1 et 2.*

Proposition 2.2.1 1. *Si (u_n) est une suite convergente et (v_n) est une suite divergente alors $(u_n + v_n)$ est divergente.*

2. *On suppose que $u_n \neq 0$ pour tout n en plus elle est convergente vers une limite non nulle. Si (v_n) est une suite divergente alors $(u_n . v_n)$ est divergente.*

3. *Si (u_n) est une suite convergente vers zéro et (v_n) est une suite bornée alors $(u_n . v_n)$ est convergente vers zéro.*

Preuve 15 1. *Par l'absurde, on suppose que $(u_n + v_n)$ est convergente. Puisque $v_n = (u_n + v_n) + (-1) . u_n$. Alors, si on utilise le théorème précédent on trouve que (v_n) est convergente ce qui représente une contradiction avec (v_n) est divergente.*

2. *De même, on montre que $(u_n . v_n)$ est divergente. (A faire).*

3. *(v_n) est une suite bornée alors il existe $M > 0$ telle que pour tout n on a $|v_n| \leq M$. On a $|u_n . v_n - 0| = |u_n . v_n| = |u_n| |v_n| < M |u_n|$. Soit $\varepsilon > 0$, si on applique la définition de la convergence de (u_n) sur $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M}$ on trouve $N \in \mathbb{N}$ telle que si $n \geq N$ on a $|u_n| = |u_n - 0| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M}$, alors $|u_n . v_n - 0| < M |u_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$. C'est à dire, on a démontré que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow |u_n . v_n - 0| < \varepsilon,$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n.v_n = 0.$

Applications

1. La suite $\left((-1)^n + \frac{1}{n+1}\right)$ est divergente car c'est la somme d'une suite convergente $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ et une suite divergente $((-1)^n)$. La suite $\left((-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ est divergente car c'est le produit d'une suite divergente $((-1)^n)$ et une suite convergente $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ qui vérifie $1+\frac{1}{n} \neq 0$ pour tout n en plus $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 1+0 = 1 \neq 0$.

2. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0$ car $\frac{(-1)^n}{n} = (-1)^n\frac{1}{n}$, la suite $((-1)^n)$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Formes indéterminées

? signifie on ne peut rien dire.

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) =?$
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) =?$
3. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n.v_n) =?$
4. Soit (v_n) une suite telle que $v_n \neq 0$ pour tout n.

   (a) Si (u_n) est une suite non nulle et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} =?$

   (b) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} =?$

2.2.3 Critères de convergence et de divergence

Critère d'encadrement (de gendarmes)

Théorème 2.2.4 *(Critère d'encadrement (de gendarmes))Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites numériques telle que, a partir d'un certain rang, on a $v_n \leq u_n \leq w_n$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.*

Preuve 16 *Soit $\varepsilon > 0$ alors*

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq N_1 \Longrightarrow |v_n - l| < \varepsilon \Longrightarrow -\varepsilon < v_n - l < \varepsilon$$