La convexité : on a besoin les définitions suivants :

Définition (1) : on dira qu'un ensemble $C \subseteq \mathbb{R}^n$ est convexe ssi pour tout $x, y \in C$ le ségment $[x, y] = \{ tx + (1-t) y \mid t \in [0,1] \}$ est contenu dans C.

Définition (2) :

Un sous ensemble $C \subseteq \mathbb{R}^n$ est dite strictement convexe s'il vérifier :

$$\forall x, y \in C : x \neq y :]x, y[= \{ tx + (1-t) y : t \in]0,1[\} \subset \mathrm{int}(C).$$

Définition (3) :

une partie $C \subseteq \mathbb{R}^n$ est dite fortement convexe s'il existe une constance $\gamma > 0$ telque :

$$\left[\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) + y \right] \in C : \forall x_1, x_2 \in C \text{ et } \|y\| \leq \gamma \| x_1 - x_2 \|_2^2$$

Définition (4) :

L'enveloppe convexe d'un sous-ensemble $C \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^n$; noté par : $\mathrm{co}(C)$: est L'ensemble des combinaisons convexes finies d'élements de C ; c.à.d :

$$\mathrm{co}(C) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \;/\; \alpha_i \in \mathbb{R}_+ : x_i \in C_i \; ; \; \forall i = \overline{1,n} \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$

d'autre part ; L'ensemble $\mathrm{co}(C)$: est le plus petit convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant C.

Définition (5) : Soit la fonction $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ où C est convexe ; le domaine de f c'est L'ensemble défini par :

$$\mathrm{dom}(f) = D_f = \{ x \in C : f(x) < +\infty \}$$; au plus ;

f est bien défini sur $\mathbb{R}^n$ si : $dom(f) \neq \emptyset$.

Définition (6):

La fonction $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est dite fonction propre si elle ne prend jamais les valeurs $(-\infty)$ et $(+\infty)$.

Définition (7):

L'épigraphe de f c'est l'ensemble défini par:

$$\text{épi}(f) = \{ (x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha \}.$$

Définition (8):

on dit qu'une fonction $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est convexe si :

$\forall x, y \in dom(f) . \forall \lambda \in [0,1]$ on a:

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Remarque:

f : est dite strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$ si :

$$\left[\forall x, y \in C : f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) : \forall \lambda \in [0,1] \right].$$

- il y a une relation entre la convexité de f et la convexité de l'épigraphe de f : ; donc ; on a le lemme suivant:

Lemme: on a:

$$[f : \text{est convexe sur } C \subseteq \mathbb{R}^n] \Leftrightarrow [\text{épi}(f) : \text{est convexe dans } C].$$

preuve: soit la fonction $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe;

on a:

$$\text{épi}(f) = \{ (x,\alpha) \in C \times \mathbb{R}^n : f(x) \leq \alpha \}.$$ donc:

$\forall (x,\alpha),(y,\alpha) \in \text{épi}(f)$: $\forall \lambda \in [0,1]$ on a:

$[f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)]$ puisque f est convexe.

et:

$$\begin{cases} (x,\alpha) \in \text{épi}(f) \Rightarrow f(x) \leq \alpha \\ \text{et} \\ (y,\alpha) \in \text{épi}(f) \Rightarrow f(y) \leq \alpha. \end{cases}$$ donc:

$$[f(\lambda x + (1-\lambda) y \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)] \Leftrightarrow [f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda \alpha + (1-\lambda) \alpha]$$

$$\Leftrightarrow [f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \alpha]$$

$$\Leftrightarrow [(\lambda x + (1-\lambda) y, \alpha) \in \text{épi}(f)]$$

alors; on a trouver que:

~~$[\forall (x,\alpha),(y,\alpha) \in \text{épi}(f)]$: et $\forall \lambda \in [0,1]$~~

$[\forall (x,\alpha),(y,\alpha) \in \text{épi}(f): \forall \lambda \in [0,1]: (\lambda x + (1-\lambda) y, \alpha) \in \text{épi}(f)]$ donc:

[épi(f) est convexe] #

Définition (9):

f est dite fortement convexe de module γ sur $C \subseteq \mathbb{R}^n$ s'il existe un nombre réel $\gamma > 0$ telque:

$\forall x, y \in \text{dom}(f)$: et $\forall \lambda \in [0,1]$:

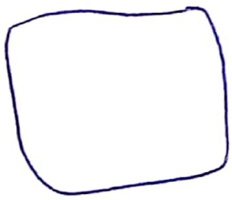
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - \frac{\gamma}{2} \lambda (1-\lambda) \|x-y\|_2^2 .$$

Exemple:

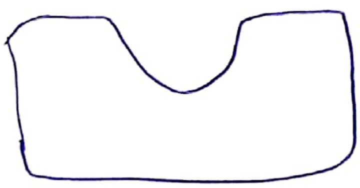
1/ la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement convexe.

2/ la fonction $x \mapsto |x|$ est convexe mais pas strictement convexe.

3/

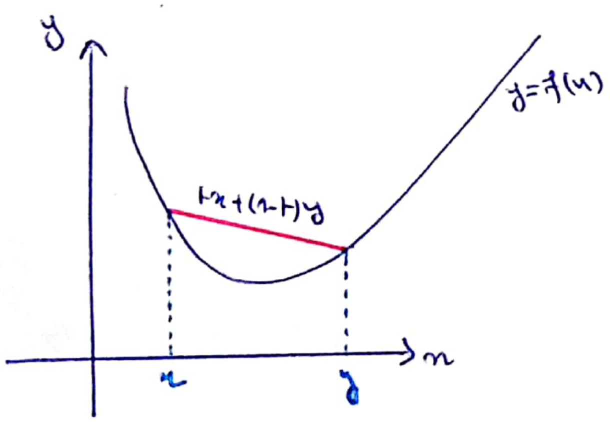


ensemble convexe.

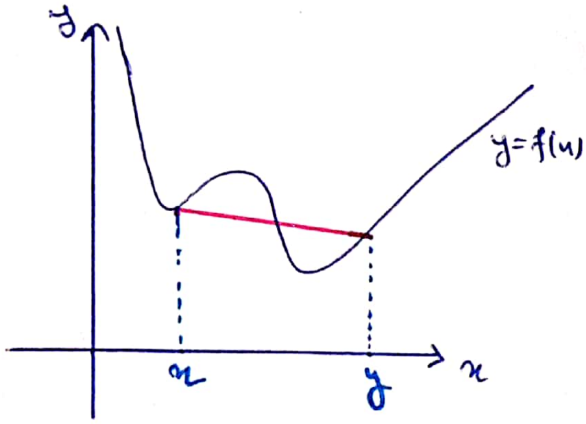


ensemble non- convexe.

4/



fonction convexe



fonction non-convexe.

Définition (10): une fonction f est dite concave si $(-f)$ est convexe;

Remarque:

les fonctions affines : $f(x) = \langle a, x\rangle + b$ où : $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$ sont les seules fonctions à la fois convexes et concaves #

on a la proposition suivante :

proposition: Soit $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe et $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; une fonction convexe sur C ; et soit l'ensemble C_α : le sous-ensemble de niveau α de f donné par : $C_\alpha = \{x \in C : f(x) \leq \alpha\}$; alors ; C_α est convexe. ; c.à.d :

$$[f \text{ est convexe sur } C \subseteq \mathbb{R}^n] \Rightarrow [C_\alpha : \text{est convexe dans } \mathbb{R}^n]$$

$$\not\Leftarrow$$

on a le Théorème suivant :

Théorème : (convexité et dérivabilité première) :

Soit $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, une fonction différentiable dans C ; où $C \subseteq \mathbb{R}^n$ est un convexe de $\mathbb{R}^n$; on a alors ;

1/ la fonction f est convexe sur C si et seulement si pour tout $x, y \in C$:

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle.$$

2/ la fonction f est strictement convexe sur C si et seulement si : pour tout $x, y \in C$

$$f(y) > f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle.$$

preuve : [exercice aux étudiants].

Théorème : (convexité et dérivabilité seconde) :

soit $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable sur $C \subseteq \mathbb{R}^n$

où C : est un convexe de $\mathbb{R}^n$; on a :

1/ la fonction f est convexe sur C si et seulement si : pour tout $x, y \in C$:

$$\langle \nabla^2 f(x)(y-x), y-x \rangle \geq 0.$$

2/ si pour tout $x, y \in C$: $x \neq y$: $\langle \nabla^2 f(x)(y-x), y-x \rangle > 0$ alors

f est strictement convexe sur C.

preuve : [exercice aux étudiants].