de a), b), c) X est une paramétrisation pour S'.

3) Vu que X est une paramétrisation du caténoïde S', il vient que cette surface S' est régulière. 1

4) Le plan tangent $T_p(S')$ de la surface S' au point $p=(x,y,z) = X(q) = X(u,v)$

Par définition le plan tangent à la surface S' au point (x,y,z) est l'espace engendré par la base $dX_q\left\{\frac{\partial X}{\partial u}(q), \frac{\partial X}{\partial v}(q)\right\}$ où X est une paramétrisation de la surface S'. 1

ici $\frac{\partial X}{\partial u}(u,v) = \begin{bmatrix} \operatorname{sh} u \cos v \\ \operatorname{sh} u \sin v \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\frac{\partial X}{\partial v}(u,v) = \begin{bmatrix} -\operatorname{ch} u \sin v \\ \operatorname{ch} u \cos v \\ 0 \end{bmatrix}$

D'où l'espace tangent à S' au point $(x,y,z) = X(u,v)$ est l'espace engendré par ces deux vecteurs.

/6

ii) $X(u,v) = (\text{ch}\,u \cos v, \text{ch}\,u \sin v, u)$. Montrons que X est une paramétrisation du caténoïde S', pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Tout d'abord on montre que $\text{Im}(X) \subset S'$ car si on pose

$x = \text{ch}\,u \cos v$, $y = \text{ch}\,u \sin v$, $z = u$ alors

$x^2 + y^2 = \text{ch}^2 u \underbrace{(\cos^2 v + \sin^2 v)}_{1} = \text{ch}^2 u = \text{ch}^2 z$.

D'où $\text{Im}(X) \subset S'$.

95

De plus on a trois conditions à vérifier

(a) X de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (c'est clair : f^{ct} trigonométrique)

(b) X homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ car :

si $x = \text{ch}\,u.\cos v$, $y = \text{ch}\,u.\sin v$, $z = u$ alors :

$\frac{y}{x} = \text{tg}\,v$ d'où $\begin{cases} v = \text{arctg}\, y/x \\ u = z \end{cases}$ si $x \neq 0$.

1

D'où X est bijective. De plus les fonction $(\text{arctg}\, y/x, z)$ sont de classe C^1 d'où X est de classe C^1.

2.5

Alors X est un homéomorphisme

(c) La condition de régularité :

$$dX_u \wedge dX_v = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{array} \\ \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{array} \\ \begin{vmatrix} \text{sh}\,u \cos v & \text{sh}\,u \sin v & 1 \\ -\text{ch}\,u \sin v & \text{ch}\,u \cos v & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

0,5

$$= (-\text{ch}\,u \cos v)\vec{i} + (\text{ch}\,u \sin v)\vec{j} + \text{ch}\,u\,\text{sh}\,u\,\vec{k}$$

De plus après calcul de la norme euclédienne on trouve :

$$\| dX_u \wedge dX_v \|^2 = \text{ch}^2 u (1 + \text{sh}^2 u)$$

0,5

$$= \text{ch}^4 u > 0 \text{ car } \text{ch}\,u \geq 1. \text{ d'où la régular}$$

($\neq 0$)

Puis une deuxième dérivation :

$$6x + 6\varphi(\varphi')^2 + 3\varphi^2\varphi'' = 0$$ 0,5

Puis une dernière dérivation

$$6 + 6(\varphi')^3 + 12\varphi\varphi'\varphi'' + 6\varphi\varphi'\varphi'' + 3\varphi^2\varphi''' = 0$$

c.à.d $2 + 2(\varphi')^3 + 6\varphi\varphi'\varphi'' + \varphi^2\varphi''' = 0$ 0,5

Exercice 03 (7pts)

1) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 . \ x^2+y^2 = ch^2 z\}$

On pose :

$$f(x,y,z) = x^2+y^2 - ch^2 z$$

On voit que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$, de plus

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2ch z \times sh z$ 0,5

Cherchons les points critiques pour f, pour cela

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ 2ch z . sh z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ sh z = 0 \text{ car } ch z \geq 1 \end{cases}$$ 1.5

et on a $sh z = 0 \Rightarrow z = 0$

D'où f admet un seule point critique $(0,0,0)$ 0,5

De plus $(0,0,0) \notin f^{-1}(\{0\}) = \{(x,y,z) : f(x,y,z) = 0\}$ car

$f(0,0,0) = -ch^2 0 = -1 \neq 0$ 0,5

Il vient que 0 est une valeur régulière pour f.

Or que $S = f^{-1}(\{0\})$ Alors S est une surface régulière car l'ensemble $f^{-1}(\{0\})$ est une surface régulière. 1

Exercice 02 (6pts) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 1$

1) Soit $(a,b) \in \Omega =]-\infty, 1[\times \mathbb{R}$ telle que $f(a,b) = 0$.

On a $f \in C^\infty$ car f est une fct élémentaire 0,5

Pour montrer que $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$ on suppose le contraire c-à-d on suppose que :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

1,5

On a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 3b^2 = 0 \Rightarrow b = 0$

d'où $f(a,b) = a^3 + b^3 - 1 = 0 \Rightarrow a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$

Cequi contredit l'hypothèse que $a \in]-\infty, 1[$.

Il vient que $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$. 2,5

On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites qui assure l'existence d'un voisinage de a $U =]\varepsilon - a, \varepsilon + a[$, $\varepsilon > 0$ et un voisinage de $b \in \mathbb{R}$ (donc $V = \mathbb{R}$) et une unique fonction $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \varphi(x)$ de classe C^∞ telles que $\varphi(a) = b$ et $f(x, \varphi(x)) = 0$, $\forall x \in U$.

2) D'après le théorème des fonctions implicites :

$$\varphi'(a) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}$$

1

$$= -\frac{3a^2}{3b^2} = -\frac{a^2}{b^2}$$

3) D'après question 1) φ est aussi de classe C^3. 0,5

De plus φ vérifie : $f(x, \varphi(x)) = 0$, $\forall x \in U$

c-à-d $x^3 + \varphi^3(x) - 1 = 0$ 0,5 $x \in U$.

si on dérive cette équation par rapport à x 2,5 trois fois successivement on trouve l'équ-diff :

$3x^2 + 3\varphi^2\varphi' = 0$ 0,5

/3

Scanned by CamScanner

• Soit $\Phi(x,y,z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x-y)$

$Im(\Phi) = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; f(x,y,z) = (u,v,w)\}$

Si $u = e^{2y} + e^{2z}$, $v = e^{2x} - e^{2z}$, $w = x-y$

Il est clair que $u > 0$ et $u+v = e^{2y} + e^{2x} > 0$ et $w \in \mathbb{R}$

d'où $Im(\Phi) \subset \{(u,v,w) \, . \, u>0, u+v>0, w \in \mathbb{R}\}$

Inversement, soit $(u,v,w) = f(x,y,z)$ alors :

$w = x-y \Rightarrow x = w + y$

et comme $u+v = e^{2x} + e^{2y} = e^{2(w+y)} + e^{2y} = e^{2y}(e^{2w}+1)$

d'où $e^{2y} = \dfrac{u+v}{e^{2w}+1}$ d'où $y = \log\sqrt{\dfrac{u+v}{e^{2w}+1}}$ (car $u+v>0$)

De plus :

$e^{2z} = u - e^{2y} = u - \dfrac{u+v}{e^{2w}+1} = \dfrac{ue^{2w} - v}{1+e^{2w}}$

c-à-d $z = \log\sqrt{\dfrac{ue^{2w}-v}{1+e^{2w}}}$ si $ue^{2w} > v$ 1

enfin $x = w + y = w + \log\sqrt{\dfrac{u+v}{e^{2w}+1}}$. Il vient que

$Im(\Phi)$ est l'ouvert $\{(u,v,w) : u>0, u+v>0, w \in \mathbb{R}\}$

• Montrons que Φ est un C^∞-difféomorphisme.

On a les composantes de Φ, sont des fonctions élémentaires, d'où Φ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$. 0,5

De plus : 2

$$\det Jac\,\Phi = \det \begin{bmatrix} 0 & 2e^{2x} & 1 \\ 2e^{2y} & 0 & -1 \\ 2e^{2z} & -2e^{2z} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -4e^{2z}(e^{2x} + e^{2y}) \neq 0 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

D'après le théorème d'inversion locale Φ est un C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur son image l'ouvert $\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 . u>0, u+v>0, w \in \mathbb{R}\}$.

3.a) $d(\Phi^{-1})_{(u,v,w)} = (d\Phi_{(x,y,z)})^{-1}$ où $(u,v,w) = \Phi(x,y,z)$ 1

$$= [\quad]^{-1}$$

/2

Scanned by CamScanner

Corrigé type d'examen final : Géo - diff - 2017-2018

Exercice 01 : (7pts)

A 1) $L : U \subset E \to F$ une application linéaire. Montrons : L est différentiable en $x \in U$. En effet par définition :

$$\lim_{h \to 0_E} \frac{\| L(x+h) - L(x) - dL_x(h) \|_F}{\|h\|_E}$$

$$= \lim_{h \to 0_E} \frac{\| L(x) + L(h) - L(x) - dL_x(h) \|_F}{\|h\|_E}$$

(1)

Pour que cette limite $= 0$ on peut prendre $dL_x(h) = L(h)$

(car $dL_x : E \to F$, $h \mapsto dL_x(h)$ est linéaire et car L est linéaire)

donc L est différentiable en $x \in U$ et sa différentielle est constante, égale L en tout point $h \in E$, c-à-d

$\forall h \in E$: $dL_x(h) = L(h)$

A 2). Si $f : U \subset E \to F$ est différentiable en $x \in U$ et si $g : V \subset F \to G$ est différentiable au point $y = f(x) \in V$ alors par le théorème de composition l'application

(1)

$g \circ f : U \subset E \to G$ est différentiable en tout point $x \in U$, et on a sa différentielle au point $x \in U$ est donnée par :

$$\forall h \in E : \quad d(g \circ f)_x(h) = (dg_{f(x)}) \cdot (df_x(h))$$

A 3) En dimension finie $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$, si f est différentiable au point $x \in U \subset \mathbb{R}^n$, alors l'application linéaire df_x peut être identifier à une matrice dite matrice Jacobienne. Dans ce cas on introduit la notion des dérivées partielles et on a :

(1)

$$\forall h \in \mathbb{R}^n \quad df_x(h) = (Jac f_x)\, h$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

1

UNIVERSITÉ DE BATNA -2-
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

$1^{ère}$ ANNÉE LMD
INITIATION À LA GÉOMÉTRIE
2017-2018

EXAMEN FINAL

DURÉE : 2 HEURES

EXERCICE 1. (A) Soient E, F, G des espaces de Banach, $U \subset E$, $V \subset F$ deux ouverts non vides.

(A.1) Montrer que toute application linéaire $L : U \to F$ est différentiable en tout point $x \in U$, et calculer dL_x.

(A.2) Soient $f : U \to F$ et $g : V \to G$ deux applications différentiables aux points $x \in U$ et $f(x) \in V$ respectivement. Déterminer $d(gof)_x$.

(A.3) Si $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$ et $f : U \subset E \to F$ une application différentiable au point $x \in U$. Déterminer df_x dans ce cas.

(B) Soit l'application $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\Phi(x,y,z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$$

(B.1) Montrer que $Im(\Phi) = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : u > 0, u + v > 0, w \in \mathbb{R}\}$ et que Φ est un C^∞ – difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur l'ouvert $Im(\Phi)$.

(B.2 Déduire $d(\Phi^{-1})_{(u,v,w)}$.

EXERCICE 2. Soit $\Omega =]-\infty, 1[*\mathbb{R}$ et définissons $f : \Omega \to \mathbb{R}$ par : $f(x,y) = x^3 + y^3 - 1$.

(1) A l'aide du théorème des fonctions implicites, montrer que pour tout point $(a,b) \in \Omega$ vérifiant $f(a,b) = 0$, il existe un voisinage U de $a$et une unique fonction $\phi : U \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, telles que : $\phi(a) = b$ et $f(x, \phi(x)) = 0$ pour tout $x \in U$.

(2) Calculer $\phi'(a)$.

(3) Vérifier qu'on fait ϕ est de classe C^3 et qu'elle vérifie l'équation différentielle :

$$\phi^2(x)\phi'''(x) + 6\phi(x)\phi'(x)\phi''(x) + 2(\phi'(x))^3 + 2 = 0, \quad x \in U$$

EXERCICE 3. Le caténoïde est une surface de révolution engendré par rotation d'une chainette autour de sa base. En effet, il est déterminer par l'équation cartésienne :

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \cosh^2 z\}.$$

(1) Posons $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - \cosh^2 z$. Montrer que 0 est une valeur régulière pour f puis déduire que S est une surface régulière.

(2) Considérons l'application $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $X(u,v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$. Montrer que X est une paramétrisation du caténoïde S. (Indication : pour la condition de régularité calculer $\|dX_u \wedge dX_v\|^2$, (où $\| \quad \|$ signifie la norme euclidienne).

(3) Que peut-on conclure ?

(4) Déterminer le plan tangent $T_p(S)$ à la surface S au point $p = X(q)$, $q \in \mathbb{R}^2$.

BON COURAGE