UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Master 1 - Math. Fondamentales, CSMI

Quelques exercices corrigés d'optimisation

Yannick PRIVAT - yannick.privat@unistra.fr

Table des matières

1 Calcul différentiel

Exercice 1.

1. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

admet des dérivées partielles au point $(0,0)$, mais n'est pas continue en $(0,0)$.

2. Soit E, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Montrer la continuité, puis la différentiabilité et calculer la différentielle de l'application « produit scalaire » $\Phi : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(x,y) = \langle x, y \rangle$ pour tous $(x,y) \in E^2$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, avec $(n,m) \in \mathbb{N}^{*2}$.
   (a) Montrer que l'application $J : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ définie par $J(X) = \|AX\|^2$, où la notation $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$, est différentiable et calculer sa différentielle.
   (b) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ définie par $G(X) = f(J(X))$ est différentiable et calculer sa différentielle.

Correction.

1. On a pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $f(t,0) - f(0,0) = \frac{0^2}{t} = 0$, ce qui montre que $\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$, donc f admet une dérivée en $(0,0)$ selon le vecteur $(1,0)$, et que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. De même, $f(0,t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc f est dérivable en $(0,0)$ selon le vecteur $(0,1)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$.

2. L'application Φ étant bilinéaire, sa continuité sur E^2 est équivalente à sa continuité en $(0,0)$. De plus, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\Phi(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ pour tous $(x,y) \in E^2$, où $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.
Étudions la différentiabilité de Φ. Fixons $(x,y) \in E^2$ et $(h,k) \in E^2$. On a :
$$\Phi(x+h, y+k) = \Phi(x,y) + \Phi(x,k) + \Phi(h,y) + \Phi(h,k),$$
donc si $L(h,k) = \Phi(x,k) + \Phi(h,y)$, on a
$$\|\Phi(x+h,y+k) - \Phi(x,y) - L(h,k)\| = \|\Phi(h,k)\| \leq \|h\| \cdot \|k\| = \mathrm{o}(N(h,k)),$$
en prenant par exemple $N(h,k) = \max\{\|h\|, \|k\|\}$. De plus, L est linéaire et continue car
$$|L(h,k)| \leq \|x\| \cdot \|k\| + \|h\| \cdot \|y\| \leq N(x,y)N(h,k) \xrightarrow[N(h,k)\to 0]{} 0,$$
en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On en déduit simultanément que Φ est différentiable, et que $d\Phi_{(x,y)}(h,k) = L(h,k) = \langle x, k\rangle + \langle y, h\rangle$.

3. (a) L'application $X \in \mathbb{R}^n \mapsto \|X\|^2$ est $\mathcal{C}^\infty$ donc différentiable sur $\mathbb{R}^n$, car polynômiale. L'application $X \mapsto AX$ est linéaire, donc différentiable. Par conséquent, l'application J est différentiable en tant que composée de fonctions qui le sont. De plus, pour tout $X \in \mathbb{R}^m$, on a
$$J(X) = \langle AX, AX\rangle = \langle A^\top AX, X\rangle,$$
avec $A^\top A \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R})$. On en déduit que la différentielle de J en X est l'application linéaire $d_X J : h \in \mathbb{R}^m \mapsto 2\langle A^\top AX, h\rangle$.

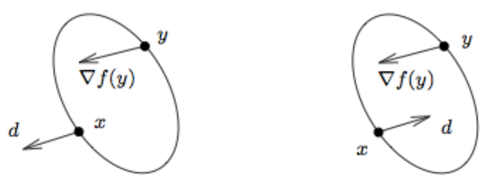
   (b) Utilisons le théorème de composition des différentielles. On obtient
$$d_X G(h) = d_{J(X)} f \circ d_X J(h) = 2f'(J(X))A^\top Ah.$$
pour tout $h \in \mathbb{R}^m$.

Exercice 2. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Correction. La fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ en tant que produit, quotient ne s'annulant pas etc. de fonctions qui le sont. Reste à étudier la régularité en $(0,0)$. On a
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, \qquad |f(x,y)| \leq \frac{|x|^3}{x^2} + \frac{|y|^3}{y^2} = |x| + |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$
f est donc continue en $(0,0)$. En revanche, f n'est pas C^1 en ce point car elle n'est même pas différentiable en $(0,0)$. En effet, soit $t \neq 0$ et $(x,y) \neq (0,0)$. On a
$$\frac{f(tx,ty) - f(0,0)}{t} = \frac{t^3(x^3+y^3)}{t^3(x^2+y^2)} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}.$$
Or, si f était différentiable en $(0,0)$, cette limite coïnciserait avec $d_{(0,0)}f(x,y)$ et serait en particulier linéaire par rapport à (x,y) ce qui n'est pas le cas.

Exercice 3. *(examen, juin 2018)* Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, une fonction différentiable. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^2$. On note $\nabla f(x_0)$ le gradient de f en x_0.

1. Soit $d \in \mathbb{R}^2$, une direction non nulle telle que $\|\nabla f(x_0) + d\| \leq \|\nabla f(x_0)\|$.
   Montrer que d est une direction de descente [1] de f en x_0. Trouver alors le pas optimal $\rho \in \mathbb{R}$ minimisant la fonction $\mathbb{R} \ni \rho \mapsto \|\nabla f(x_0) + \rho d\|$. Exhiber une direction de descente qui n'appartient pas à $\text{vect}(-\nabla f(x_0))$ lorsque $\nabla f(x_0) \neq 0$.
2. Soit $c \in \mathbb{R}$ et $L_c = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = c\}$, la ligne de niveau c de f. On suppose qu'une représentation paramétrique de L_c est donnée par $x = \gamma(t)$ avec $t \in \mathbb{R}$ où $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est une fonction différentiable telle que $\gamma(0) = x_0$.
   Montrer que $\nabla f(x_0)$ est perpendiculaire au vecteur tangent à L_c en x_0.
3. Soit $c \in \mathbb{R}$. Les dessins de la figure ci-dessous représentent la ligne de niveau c d'une fonction quadratique $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dans quels dessins (A ou B ou les deux) la direction d est-elle de descente au point x ? Une justification précise est attendue.



A B

Correction.

1. Puisque $\|\nabla f(x_0) + d\| \leq \|\nabla f(x_0)\|$, on élève chacun des membres de l'inégalité au carré et on les développe. On obtient $\|\nabla f(x_0)\|^2 + 2\langle \nabla f(x_0), d\rangle_2 + \|d\|^2 \leq \|\nabla f(x_0)\|^2$ et par conséquent, $\langle \nabla f(x_0), d\rangle_2 \leq -\frac{1}{2}\|d\|^2 < 0$. Par conséquent,

$$\frac{f(x_0 + \varepsilon d) - f(x_0)}{\varepsilon} = \langle \nabla f(x_0), d\rangle_2 + \mathrm{o}(\varepsilon) \leq -\frac{1}{2}\|d\|^2 + \mathrm{o}(\varepsilon).$$

   Par conséquent, le second membre est strictement négatif si ε est assez petit et la conclusion s'ensuit.
   Pour trouver le pas optimal, posons $\varphi(\rho) = \|\nabla f(x_0) + \rho d\|$ et remarquons que le problème $\inf_{\mathbb{R}} \varphi$ est équivalent au problème $\inf_{\mathbb{R}} \varphi^2$. Or, $\varphi^2(\rho) = \|\nabla f(x_0)\|^2 + 2\rho\langle d, \nabla f(x_0)\rangle + \rho^2\|d\|^2$, donc le minimum est atteint en $\rho^* = -\frac{\langle d, \nabla f(x_0)\rangle}{\|d\|^2}$ et vaut $\inf_{\mathbb{R}} \varphi = \|\nabla f(x_0)\|^2 - \frac{\langle d, \nabla f(x_0)\rangle^2}{\|d\|^2}$. En particulier, tout vecteur de la forme $d = -\nabla f(x_0) + \varepsilon u$, où u est un vecteur unitaire et $\varepsilon \in]0, \|\nabla f(x_0)\|[$ est une direction de descente.
2. Le vecteur tangent au point x_0 est donné par $\gamma'(0)$. La relation $f(x) = c$ s'écrit encore $f(\gamma(t)) = c$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Dérivons cette relation en utilisant la composition des différentielles, il vient $\langle \nabla f(x_0), \gamma'(0)\rangle = 0$, autrement dit $\nabla f(x_0)$ est perpendiculaire au vecteur tangent à L_c en x_0.
3. Notons d'abord que deux lignes de niveaux c et c' avec $c \neq c'$ ne peuvent pas se croiser, car sinon, on aurait $c = c'$. Les lignes de niveau d'une fonction quadratique de $\mathbb{R}^2$ sont des coniques (par définition), des ellipses ici puisque les courbes sont fermées. Par conséquent, toutes les lignes de niveau à l'intérieur de l'ellipse sont encore fermées donc sont des ellipses ayant toutes même centre. Puisque l'opposé du gradient en y pointe vers une direction de descente, on en déduit qu'une direction sortante de l'ellipse sera une direction de descente. Par conséquent, d est une direction de descente dans le cas A et pas dans le cas B.

1. autrement dit qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $f(x_0 + \varepsilon d) < f(x_0)$ pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$

2 Analyse des problèmes d'optimisation sans contrainte

Exercice 4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

1. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2_+$ (et les déterminer) tels que $f(x,y) \geq \alpha\|(x,y)\|^2 + \beta$ pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, où la notation $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.
   En déduire que le problème
   $$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) \qquad (\mathcal{P})$$
   possède au moins une solution.
2. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$?
3. Déterminer les points critiques de f, et préciser leur nature (minimum local, maximum local, point-selle, ...). Résoudre alors le problème $(\mathcal{P})$.

Correction.

1. f est polynômiale donc de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. En utilisant le fait que $xy \geq -\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, on écrit
   $$f(x,y) \geq x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy \geq x^4 + y^2 - 4x^2 - 4y^2,$$
   pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En utilisant le fait que pour tout $(X,\varepsilon) \in \mathbb{R}^2$, $X^4 + \varepsilon^4 - 2\varepsilon X^2 \geq 0$, il vient
   $$f(x,y) \geq (2\varepsilon - 4)x^2 + (2\varepsilon - 4)y^2 - 2\varepsilon^4.$$
   Choisissons par exemple $\varepsilon = 3$, on en déduit
   $$f(x,y) \geq 2(x^2+y^2) - 162 \xrightarrow[\|(x,y)\|\to+\infty]{} +\infty,$$
   ce qui prouve que f est coercive sur $\mathbb{R}^2$ qui est fermé et de dimension finie. D'après le théorème du cours, le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution.
2. Pour étudier la convexité de f (qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$), calculons sa matrice hessienne en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$. On a $\operatorname{Hess} f(x,y) = 4\begin{pmatrix} 3x^2-1 & 1 \\ 1 & 3y^2-1 \end{pmatrix}$.
   Rappelons que f est convexe sur $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si sa matrice hessienne est semi-définie positive en tout point. Or, on vérifie aisément que les valeurs propres de $\operatorname{Hess} f(0,0)$ sont 0 et -2. Par conséquent, f n'est pas convexe.
3. Les points critiques de f sont donnés par les solutions de $\nabla f(x,y) = (0,0)$, autrement dit, les points critiques sont solutions du système :
   $$\left\{\begin{array}{l} x^3 - (x-y) = 0 \\ y^3 + (x-y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^3 + y^3 = 0 \\ y^3 + (x-y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -x \\ x^3 - 2x = 0 \end{array}\right.$$
   On en déduit que f admet trois points critiques : $O(0,0)$, $A(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $B(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
   f étant de classe $\mathcal{C}^2$, on va utiliser la caractérisation des points critiques à l'aide de la hessienne calculée à la question précédente.
   - Point A : $\operatorname{Hess} f(A) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$ donc la trace de $\operatorname{Hess} f(A)$ vaut 40 et son déterminant 384. On en déduit que $\operatorname{Hess} f(A)$ possède deux valeurs propres strictement positives donc que A est un **minimiseur local** pour f.
   - Point B : $\operatorname{Hess} f(B) = \operatorname{Hess} f(A)$, donc la même conclusion que pour le point A s'impose.

- Point O : $\text{Hess} f(O) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, donc la trace de $\text{Hess} f(O)$ vaut -8 et son déterminant est nul. Il vient que ses valeurs propres sont 0 et -8. On ne peut donc rien conclure dans ce cas à l'aide de la matrice hessienne. En revanche, on peut donner un argument à la main : soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 2$. On a $f(x, -x) = 2x^4 - 8x^2 = -2x^2(4 - x^4)$. Or, $|x| < 2$ donc $4 - x^2 > 0$ et on en déduit que $f(x, -x) < 0$. De même, soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x, x) = 2x^4 \geq 0$. Puisque les inégalités précédentes sont obtenues pour des x arbitrairement petits, on en déduit que le point $(0, 0)$ est un **point-selle** pour f.

En conclusion, puisque le problème $(\mathcal{P})$ possède une solution, la caractérisation des points critiques de f nous assure que

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y) = f(A) = f(B) = -8.$$

Exercice 5. *(examen - juin 2018)* On définit la fonction $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $J(x, y) = y^4 - 3xy^2 + x^2$.

1. Déterminer les points critiques de J.
2. Soit $d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$. En utilisant l'application $\mathbb{R} \ni t \mapsto J(td_1, td_2)$, montrer que $(0, 0)$ est un minimum local le long de toute droite passant par $(0, 0)$.
3. Le point $(0, 0)$ est-il un minimum local de la restriction de J à la parabole d'équation $x = y^2$?
4. Calculer la matrice hessienne de J. Quelle est la nature du point critique $(0, 0)$?

Correction.

1. On résout : $\nabla J(x, y) = 0 \iff \begin{cases} -3y^2 + 2x = 0 \\ 4y^3 - 6xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{3}{2}y^2 \\ y^3 = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0)$.
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $J(td_1, td_2) = t^4 d_2^4 - 3t^3 d_1 d_2^2 + t^2 d_1^2$.Supposons $d_1 \neq 0$. Puisque $\psi'(t) = 4t^3 d_2^4 - 9t^2 d_1 d_2^2 + 2d_1^2 t$ et $\psi''(t) = 12t^2 d_2^4 - 18td_1 d_2^2 + 2d_1^2$, on a $\psi'(0) = 0$ et $\psi''(0) = 2d_1^2 > 0$, donc 0 est un minimum local de ψ. Si $d_1 = 0$ et $d_2 \neq 0$, alors $J(0, td_2) = t^4 d_2^4$ et 0 est un minimum local de ψ. Enfin, le cas $d = 0$ est trivial. La conclusion attendue s'ensuit.
3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x = y^2$. Alors, $J(x, y) = -y^4$ et il est alors clair que $J(x, y) < J(0, 0)$ si $x = y^2$ et y est suffisamment proche de 0. Par conséquent, 0 est un max local de la restriction de J à cette parabole.
4. On a $\text{Hess} J(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -6y \\ -6y & 12y^2 - 6x \end{pmatrix}$ et $\text{Hess} J(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Puisqu'une valeur propre de la hessienne en $(0, 0)$ est nulle, on ne peut rien conclure de ce calcul. En revanche, les deux questions précédentes prouvent que $(0, 0)$ est un point selle de J.

Exercice 6. *(moindres carrés)* Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère un nuage de points $\{(t_i, x_i)\}_{1\leq i\leq N}$, et on cherche à mettre en œuvre une *régression parabolique*, autrement dit, on recherche la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = at^2 + bt + c$, où a, b et c sont trois réels à déterminer, telle que la somme sur tous les indices i variant de 1 à N du carré de la distance du point (t_i, x_i) au point de même abscisse sur $\mathcal{P}$ soit minimale.

1. Écrire ce problème comme un problème de minimisation quadratique, c'est-à-dire un problème de la forme
$$\inf_{X\in\mathbb{R}^n} J(X) \quad \text{avec} \quad J(X) = \frac{1}{2}\langle AX, X\rangle - \langle b, X\rangle, \qquad (\mathcal{Q})$$
avec $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$. On devra donc expliciter n, A et b.
On utilisera la notation $S_k = \sum_{i=1}^{N} t_i^k$.
2. Discuter de l'existence des solutions d'un tel problème.
3. On suppose que la matrice A est définie positive. Démontrer que $(\mathcal{Q})$ possède une unique solution.

Correction.

1. Le problème s'écrit

$$\inf_{X\in\mathbb{R}^3} J(X) \qquad \text{avec} \qquad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J(X) = \sum_{i=1}^{N} (x_i - at_i^2 - bt_i - c)^2.$$

Écrivons $J(X) = \|MX - k\|^2$ avec $M = \begin{pmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_N^2 & t_N & 1 \end{pmatrix}$ et $k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$. D'après le cours sur la méthode des moindres carrés, on a

$$J(X) = \frac{1}{2}\langle AX, X\rangle - \langle b, X\rangle$$

avec $n = 3$, $A = M^\top M \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $b = M^\top k \in \mathbb{R}^3$. On calcule $A = \begin{pmatrix} S_4 & S_3 & S_2 \\ S_3 & S_2 & S_1 \\ S_2 & S_1 & N \end{pmatrix}$.

2. Ce problème est équivalent au problème de minimiser la distance euclidienne de k au sous espace vectoriel (de dimension finie) $\mathrm{Im}(M)$. C'est donc un problème de projection orthogonale, et il admet une solution.
3. Dans ce cas, on sait que Hess $J(X) = A$ qui est définie positive. Par conséquent, J est strictement convexe, et J possède au plus un minimum dans $\mathbb{R}^N$. Comme on a vu qu'elle en possède au moins un, on conclut à l'existence et l'unicité.

Exercice 7. (*moindres carrés)* On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1,1]$ par $f(x) = x^3$. L'espace $C^0([-1,1])$ des fonctions continues sur $[-1,1]$ est muni du produit scalaire défini par $\langle h, g\rangle = \int_{-1}^{1} h(x)g(x)\,dx$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée, définie par $\|h\| = \sqrt{\langle h, h\rangle}$, pour tous $(h,g) \in (C^0([-1,1]))^2$.

On souhaite déterminer le polynôme P de degré inférieur ou égal à 1 qui approche le mieux f au sens des moindres carrés, c'est-à-dire qui minimise $\|f - P\|^2$ parmi tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 1 (sous réserve qu'il existe et soit unique).

1. Mettre ce problème sous la forme d'un problème de moindres carrés de dimension finie. Quelle est cette dimension ?
2. Étudier l'existence/l'unicité des solutions de ce problème.
3. Résoudre ce problème.

Correction.

1. Le problème d'optimisation sous-jacent s'écrit

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^3} J(a,b), \quad \text{avec } J(a,b) = \int_{-1}^{1} (x^3 - ax - b)^2\,dx.$$

On calcule alors

$$J(a,b) = \int_{-1}^{1} (x^6 + a^2x^2 + b^2 - 2ax^4 - 2bx^3 + 2abx)\,dx = \frac{1}{2}\langle AX, X\rangle - \langle \tilde{b}, X\rangle + c,$$

avec $X = (a,b)^\top$, $A = \begin{pmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $c = \frac{2}{7}$. On s'est ainsi ramené à un problème d'optimisation de dimension 2.

2. Le problème d'optimisation précédent est un problème d'optimisation quadratique donc la matrice hessienne associée est définie positive (cela se retrouve d'ailleurs en utilisant le formalisme des problèmes de moindres carrés menant à l'équation normale). On en déduit que la fonction J est coercive sur $\mathbb{R}^2$ qui est fermé et de dimension finie donc ce problème possède une solution unique.

3. L'équation normale s'écrit $AX = \tilde{b}$ qui se résout directement. On obtient : $X = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 8. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit $f_a : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + axy - 2x - 2y$.

1. Pour quelles valeurs de a, la fonction f_a est-elle convexe ? Et strictement convexe ?
2. Discuter en fonction des valeurs du paramètre a de l'existence de solutions au problème d'optimisation $\inf\{f_a(x, y),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
3. Lorsque $a \in]-2, 2[$, résoudre le problème précédent.

Correction.

1. La fonction f_a est C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ car polynômiale. Pour étudier la convexité de f, calculons sa hessienne : pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\operatorname{hess} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}$. Cette matrice ne dépend pas de x et y. Etant symétrique réelle, elle est diagonalisable et on note λ_1 et λ_2 ses valeurs propres. On a $\operatorname{tr}(\operatorname{hess} f_a(x, y)) = \lambda_1 + \lambda_2 = 4 > 0$, donc f_a n'est jamais concave. De plus, $\det(\operatorname{hess} f_a(x, y)) = \lambda_1\lambda_2 = 4 - a^2$. On en déduit que f_a est convexe si, et seulement si $a \in [-2, 2]$, strictement convexe si, et seulement si $a \in]-2, 2[$ et n'est ni convexe, ni concave sinon.
2. Souvenons-nous du cours sur l'optimisation de fonctions quadratiques :
   - si $a \in]-2, 2[$, $\operatorname{hess} f_a$ est constante et appartient à $S_n^{++}(\mathbb{R})$. Par conséquent, f_a est strictement convexe et coercive (cf. cours) sur $\mathbb{R}^2$ qui est fermé et de dimension finie. Par conséquent, le problème $\inf_{\mathbb{R}^2} f_a$ a une unique solution.
   - si $a \in \mathbb{R}\backslash[-2, 2]$, la matrice $\operatorname{hess} f_a$ a une valeur propre strictement négative μ, et il existe une direction $\vec{e} \in \mathbb{R}^2$ (vecteur propre associé à μ) dans laquelle $f(t\vec{e}) \to -\infty$ quand $t \to +\infty$. Par conséquent, le problème $\inf_{\mathbb{R}^2} f_a$ n'a pas de solution.
   - Cas $a \in \{-2, 2\}$. Dans ce cas, la matrice $\operatorname{hess} f_a$ est semi-définie positive, mais pas définie positive. D'après le cours, le problème $\inf_{\mathbb{R}^2} f_a$ a une solution si, et seulement si $(2, 2)^\top \in \operatorname{Im}(\operatorname{hess} f_a)$. Or, puisque $a = \pm 2$,

     $$\operatorname{hess} f_a \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h_1 + ah_2 \\ ah_1 + 2h_2 \end{pmatrix} = h_1 \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix} + h_2 \begin{pmatrix} a \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Im} \operatorname{hess} f_a = \operatorname{vect} \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}.$$

     Par conséquent, si $a = 2$, $(2, 2)^\top \in \operatorname{Im}(\operatorname{hess} f_a)$ et le problème $\inf_{\mathbb{R}^2} f_a$ a une infinité de solutions. Si $a = -2$, $(2, 2)^\top \notin \operatorname{Im}(\operatorname{hess} f_a)$ et le problème $\inf_{\mathbb{R}^2} f_a$ n'a pas de solution.
3. Déterminons les points critiques de f_a :

   $$\nabla f_a(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x + ay - 2 \\ 2y + ax - 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{2}{2 + a} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   D'après l'étude précédente, dans le cas considéré, le problème $\inf_{\mathbb{R}^2} f_a$ a une unique solution qui est donc donnée par $x = y = \frac{2}{2+a}$ et l'infimum vaut alors $-\frac{4}{2+a}$

Exercice 9. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^n\backslash\{0_{\mathbb{R}^n}\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2},$$

où $\langle\cdot, \cdot\rangle$ est le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|$ la norme induite.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition.

2. Montrer que les problèmes d'optimisation

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0_{\mathbb{R}^n}\}} f(x) \qquad \text{et} \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0_{\mathbb{R}^n}\}} f(x)$$

possèdent une solution.

3. Déterminer l'ensemble des points critiques de la fonction f.
4. Résoudre les deux problèmes ci-dessus.
5. Démontrer que la matrice hessienne de f en un point critique $x^* \in \mathbb{R}^n\setminus\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ est

$$\mathrm{Hess}\, f(x^*) = \frac{2}{\|x^*\|^2}(A - f(x^*)\,\mathrm{I}_n),$$

où I_n désigne la matrice identité de taille n.

6. En déduire que tous les points critiques qui ne sont pas solution d'un des problèmes ci-dessus sont des points-selles.

Correction.

1. f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ en tant que quotient de fonctions polynômiales dont le dénominateur ne s'annule qu'en $0_{\mathbb{R}^n}$.
2. Remarquons que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \langle A\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\rangle$ et que l'application $x \in \mathbb{R}^n\setminus\{0_{\mathbb{R}^n}\} \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ est une surjection de $\mathbb{R}^n\setminus\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ dans la sphère unité $S^{n-1} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| = 1\}$. Il s'ensuit que

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0_{\mathbb{R}^n}\}} f(x) = \inf_{y\in S^{n-1}} \langle Ay, y\rangle \qquad \text{et} \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0_{\mathbb{R}^n}\}} f(x) = \sup_{y\in S^{n-1}} \langle Ay, y\rangle.$$

La fonction $y \mapsto \langle Ay, y\rangle$ est continue sur S^{n-1} qui est compact. Ces problèmes ont donc une solution.

3. Pour $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, on a :

$$\nabla f(x) = 0 \iff \frac{2Ax}{\|x\|^2} - \frac{2\langle Ax, x\rangle x}{\|x\|^4} = 0 \iff Ax - f(x)x = 0.$$

Or, d'après le théorème spectral, la matrice A est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres. On note $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ son spectre, avec $\lambda_1 \le \cdots \le \lambda_n$. Si l'équation $Ax = f(x)x$ possède une solution, alors nécessairement x est un vecteur propre de A. Réciproquement, si x est un vecteur propre associé à $\lambda \in \sigma(A)$, alors $f(x) = \lambda$ et donc $Ax - f(x)x = 0$. On en déduit que l'ensemble des points critiques de f est l'ensemble des vecteurs propres $x \in \mathbb{R}^n\setminus\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ de A.

4. Puisque les deux problèmes ont une solution, on cherche les minimiseurs (resp. maximiseurs) parmi les points critique. Si x_λ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, on vérifie que $f(x_\lambda) = \lambda$. Par conséquent, les minimiseurs de f sont les vecteurs propres de $\mathbb{R}^n\setminus\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ associés à λ_1 et les maximiseurs de f sont les vecteurs propres de $\mathbb{R}^n\setminus\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ associés à λ_n. De plus,

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0_{\mathbb{R}^n}\}} f(x) = \lambda_1 \qquad \text{et} \qquad \max_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0_{\mathbb{R}^n}\}} f(x) = \lambda_n.$$

5. Puisque f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0_{\mathbb{R}^n}\}$, on va écrire un développement limité de f à l'ordre deux, et on identifiera la hessienne à l'aide du terme d'ordre 2. Soit $v \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
f(x+tv) &= \frac{\langle Ax, x\rangle + 2t\langle Ax, v\rangle + t^2\langle Av, v\rangle}{\|x\|^2\left(1 + \frac{2t}{\|x\|^2}\langle x, v\rangle + \frac{t^2}{\|x\|^2}\|v\|^2\right)} \\
&= \frac{\langle Ax, x\rangle + 2t\langle Ax, v\rangle + t^2\langle Av, v\rangle}{\|x\|^2}\left(1 - \frac{2t\langle x, v\rangle}{\|x\|^2} - \frac{t^2\|v\|^2}{\|x\|^2} + \frac{4t^2\langle x, v\rangle^2}{\|x\|^4} + \mathrm{o}(t^2)\right) \\
&= f(x) + \frac{2t}{\|x\|^2}\left(\langle Ax, v\rangle - f(x)\langle x, v\rangle\right) \\
&\quad + t^2\left(-\frac{f(x)}{\|x\|^2}\|v\|^2 + 4f(x)\frac{\langle x, v\rangle^2}{\|x\|^4} - 4\frac{\langle Ax, v\rangle\langle x, v\rangle}{\|x\|^4} + \frac{\langle Av, v\rangle}{\|x\|^2}\right) + \mathrm{o}(t^2)
\end{aligned}$$

en utilisant que $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + \mathrm{o}(u^2)$. On retrouve l'expression de la différentielle de f et on en déduit que

$$\langle \mathrm{Hess}\, f(x)v, v\rangle = 2\left(-\frac{f(x)}{\|x\|^2}\|v\|^2 + 4f(x)\frac{\langle x,v\rangle^2}{\|x\|^4} - 4\frac{\langle Ax,v\rangle\langle x,v\rangle}{\|x\|^4} + \frac{\langle Av,v\rangle}{\|x\|^2}\right).$$

Or, en un point critique x_λ (vecteur propre associé à la valeur propre λ), on a $f(x_\lambda) = \lambda$ et par conséquent,

$$\langle \mathrm{Hess}\, f(x_\lambda)v, v\rangle = \frac{2}{\|x_\lambda\|^2}\left(-f(x_\lambda)\|v\|^2 + \langle Av, v\rangle\right),$$

d'où l'expression de la hessienne annoncée.

6. Choisissons x_λ de norme 1. Choisissons $v = x_{\lambda'}$ un autre vecteur propre de A de norme 1, associé à la valeur propre λ'. Alors,
$$\langle \mathrm{Hess}\, f(x_\lambda)v, v\rangle = 2\left(\lambda' - \lambda\right).$$
Si λ n'est pas la plus petite ou la plus grande valeur propre de A, il suffit alors de choisir λ' valeur propre strictement inférieure puis supérieure à λ, et on montre que l'expression ci-dessus peut être strictement négative ou positive selon le choix de v. On en déduit que x_λ est un point-selle.

3 Analyse des problèmes d'optimisation sous contrainte

Exercice 10. Déterminer les points les plus proches et les plus éloignés de l'origine (s'ils existent) de la courbe d'équation $x^6 + y^6 = 1$. On illustrera la réponse à l'aide d'un dessin.

Correction. On note $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x,y) = 0\}$ avec $h(x,y) = x^6 + y^6 - 1$. Les points de H les plus proches et éloignés de l'origine sont respectivement solutions des problèmes

$$\inf_{(x,y)\in H} J(x,y) \qquad \text{et} \qquad \sup_{(x,y)\in H} J(x,y), \qquad \text{avec} \qquad J(x,y) = d((x,y),(0,0))^2 = x^2 + y^2$$

L'ensemble H est compact (en effet, il est fermé en tant qu'image réciproque du fermé $\{1\}$ par la fonction continue $(x,y) \mapsto x^6 + y^6$, borné car pour tout $(x,y) \in H$, $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$ et inclus dans $\mathbb{R}^2$ de dimension finie) et J est continue sur $\mathbb{R}^2$ car polynômiale. Par conséquent, les deux problèmes ci-dessus admettent une solution.

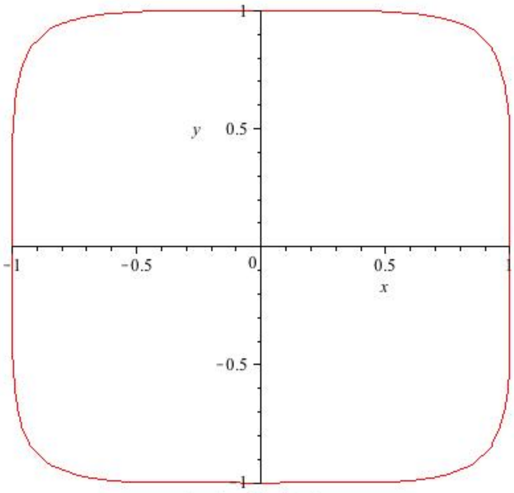
Caractérisons-la en écrivant les conditions d'optimalité. On a : $\nabla h(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0) \notin H$, donc les contraintes sont qualifiées en tout point. Soit (x,y), une solution de l'un ou l'autre des problèmes ci-dessus. D'après le théorème des extrema liés, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla J(x,y) = \lambda \nabla h(x,y)$, soit

$$\left\{\begin{array}{l} 2x = 6\lambda x^5 \\ 2y = 6\lambda y^5 \\ x^6 + y^6 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x(1 - 3\lambda x^4) = 0 \\ y(1 - 3\lambda y^4) = 0 \\ x^6 + y^6 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} & (x,y) = (0,\pm 1),\ \lambda = \frac{1}{3} \\ \text{ou} & (x,y) = (\pm 1, 0),\ \lambda = \frac{1}{3} \\ \text{ou} & (x,y) = (\pm 2^{-1/6}, \pm 2^{-1/6}) \simeq (\pm 0.89, \pm 0.89),\ \lambda = \frac{2^{2/3}}{3} \end{array}\right.$$

Or, $J(0,\pm 1) = J(\pm 1, 0) = 1$ et $J((\pm 2^{-1/6}, \pm 2^{-1/6})) = 2.2^{-1/3} \simeq 1.59$. Par conséquent, le problème $\inf_H J$ a pour solutions $(0,\pm 1)$ et $(\pm 1, 0)$ et l'infimum vaut 1, tandis que le problème $\sup_H J$ a pour solutions $(\pm 2^{-1/6}, \pm 2^{-1/6})$ et l'infimum vaut $2.2^{-1/3}$.

Exercice 11. Une entreprise fabrique deux modèles de petites voitures, les modèles X et Y. Le modèle X, le plus abordable, se vend à 1 € pièce. Quant au modèle Y, beaucoup plus sophistiqué, il se vend à 3 €. Le coût de fabrication, exprimé en €, est donné par la fonction suivante :

$$C(x,y) = 5x^2 + 5y^2 - 2xy - 2x - 1000.$$



Courbe $x^6 + y^6 = 1$.

où x est le nombre de petites voitures du modèle X et y est le nombre de petites voitures du modèle Y. On suppose que les jouets fabriqués sont tous écoulés sur le marché.

Dans tout l'exercice, on notera $C_+ = (\mathbb{R}_+^*)^2$.

1. Soit $(x,y) \in C_+$. Déterminer le profit $P(x,y)$ réalisé par l'entreprise lorsqu'elle a vendu x jouets de modèle X et y jouets de modèle Y.
2. Étudier la convexité de la fonction P sur C_+.
3. La capacité de production de l'entreprise est au total de 20 jouets par jour. En supposant que l'entreprise tourne à plein régime, trouver la répartition optimale entre les modèles de type X et Y permettant de maximiser le profit quotidien. Calculer dans ce cas le profit réalisé.

   Indication : dans cette question et la suivante, on ne tiendra pas compte des contraintes (pourtant naturelles) "$x \geq 0$" et "$y \geq 0$". On expliquera pourquoi cela ne change en réalité rien.
4. Le conseil d'administration de l'entreprise s'interroge sur la pertinence de vouloir pro- duire à pleine capacité. Il se demande s'il ne peut pas augmenter le profit en produisant autrement. Pouvez-vous aider le conseil d'administration ?

Correction.

1. Le profit est la différence entre le gain et le coût de production, donc $P(x,y) = x + 3y - C(x,y)$, puis
$$P(x,y) = -5x^2 - 5y^2 + 2xy + 3x + 3y + 1000.$$
2. P étant C^∞, on peut étudier sa convexité à l'aide de sa hessienne. On a hess $P(x,y) = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}$.

   De plus, étant symétrique réelle, la matrice hess P est diagonalisable de valeurs propres λ_1 et λ_2 telles que $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{Tr} \text{hess}\, P = -20$ et $\lambda_1 \lambda_2 = \det(\text{hess}\, P) = 96$. On en déduit que λ_1 et λ_2 sont strictement négative et P est donc concave sur ‘$\mathbb{R}^2$.
3. La contrainte sur la capacité de production s'écrit $x + y = 20$. On est donc amené à résoudre le problème d'optimisation sous contrainte $\sup_{h(x,y)=0} P(x,y)$ avec $h(x,y) = x + y - 20$. Puisque P est quadratique et strictement concave, $-P$ est coercive (cf. cours), et l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x,y) = 0\}$ est un fermé de dimension finie (image réciproque de $\{0\}$ par h qui est continue). Par conséquent, le problème précédent a une solution.

   Étudions les conditions d'optimalité (qui sont donc des CNS). Puisque pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla h(x,y) \neq 0$, les contraintes sont qualifiées en tout point. Le théorème des extrema liés fournit alors l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla P(x,y) = \lambda \nabla h(x,y)$, soit

$$\left\{\begin{array}{l} -10x + 2y + 3 = \lambda \\ -10y + 2x + 3 = \lambda \\ x + y = 20 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = y = 10 \\ \lambda = -77 \end{array}\right.$$

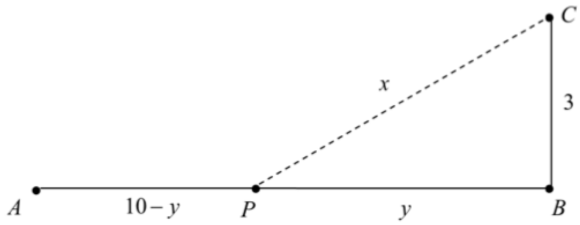
On obtient ainsi la répartition optimale de voitures X et Y à produire et le profit réalisé vaut $P(10,10) = 260$.
Remarque : en théorie, il faudrait également ajouter les contraintes $x > 0$ et $y > 0$. Cependant, puisqu'elles sont naturellement vérifiées à l'optimum, on constate *a posteriori* qu'il n'était pas nécessaire de les inclure dans le calcul.

4. Le problème que l'on peut résoudre afin de satisfaire le conseil d'administration devient $\sup_{h(x,y)\leq 0} P(x,y)$. L'existence s'obtient par le même argument. Étudions les conditions d'optimalité. Le théorème de Kuhn-Tucker fournit l'existence de $\mu \leq 0$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l} -10x + 2y + 3 = \mu \\ -10y + 2x + 3 = \mu \\ x + y \leq 20 \\ \mu(x + y - 20) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = y = \frac{3-\mu}{8} \\ x \leq 10 \\ \mu(x + y - 20) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x,y) = (10,10)\,,\ \mu = -77 \\ \text{ou } (x,y) = \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right),\ \mu = 0 \end{array}\right.$$

Or, $P(10,10) = 260 < P(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}) = \frac{8009}{8} \simeq 1001.125$. En conclusion, compte tenu des coûts de production, il est préférable de moins produire de voitures X et Y et les proportions optimales sont $(x,y) = \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right)$.

Exercice 12. *(examen, juin 2018)*



Une ville B est à 10 km à l'est d'une ville A et une ville C est à 3 km au nord de la ville B. On veut réaliser un projet d'autoroute entre les villes A et C. Le coût de 1 km d'autoroute le long de la route existante entre A et B est de 400 000 €, alors que le coût de 1 km d'autoroute ailleurs est de 500 000 €. On désire déterminer où doit se situer le point pivot P (c'est-à-dire, à quelle distance de A, l'autoroute doit bifurquer pour être construite en plein champ) pour minimiser le coût de réalisation de l'autoroute. Enfin, on impose que la bifurcation ait lieu à au moins 3 km de l'entrée de la ville B, afin d'éviter qu'elle ne subisse une trop forte pollution au quotidien.

1. Formuler cette question comme un problème de minimisation d'une fonction f des deux variables x et y sous contraintes (une égalité et trois inégalités).
2. Résoudre le problème obtenu. On étudiera au préalable l'existence et l'unicité des solutions d'un tel problème.

Correction.

1. Calculons le coût de réalisation C de l'autoroute : le coût entre A et P est de $4.10^5(10-y)$ € tandis qu'il est de $5.10^5 x$ € entre P et C. Finalement, $C(x,y) = 4.10^5(10-y) + 5.10^5 x$. Les contraintes s'écrivent $x^2 = y^2 + 3^2$ (théorème de Pythagore dans le triangle PBC), $3 \leq y \leq 10$ compte tenu de la contrainte liée à la pollution de B et $x \geq 0$. On notera que si les contraintes précédentes sont vérifiées, alors en particulier $x \leq \sqrt{10^2 + 3^2}$, autrement dit x est inférieur à la distance AC.

Il n'est donc pas nécessaire d'inclure cette dernière contrainte dans le problème. Le problème se réécrit

$$\inf_{\substack{h(x,y)=0\\ g(x,y)\leq 0}} C(x,y) \quad \text{avec} \quad C(x,y) = 4.10^5(10-y)+5.10^5 x,\ h(x,y) = x^2-y^2-9,\ g(x,y) = \begin{pmatrix} -x \\ 3-y \\ y-10 \end{pmatrix}.$$

L'existence de solutions est immédiate puisque C est continue et que l'ensemble des contraintes est compact (à écrire soigneusement). Les contraintes sont par ailleurs qualifiées en tout point de l'ensemble des contraintes. En effet :

$$\nabla h(x,y) = 2\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}, \quad \nabla g_1(x,y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_3(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit (x,y), un point admissible et $d=(d_1,d_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ telle que $\langle \nabla h(x,y), d\rangle = 0$, i.e. $xd_1 = yd_2$. Les contraintes sur g_2 et g_3 ne peuvent pas être saturées simultanément. Supposons la contrainte sur g_3 inactive en (x,y). On a $\nabla g_1(x,y), d\rangle = -d_1$ et $\nabla g_2(x,y), d\rangle = -d_2$. On cherche donc d telle que $xd_1 = yd_2$, $d_1>0$ et $d_2>0$. Un tel choix est toujours possible puisque $x>0$ et $y>0$. Supposons la contrainte sur g_3 active en (x,y). Alors, il est aisé de voir que les contraintes sur g_1 et g_2 sont inactives et on cherche donc d telle que $xd_1 = yd_2$ et $d_2<0$, ce qui est bien sûr toujours possible. Il vient que les contraintes sont qualifiées en tout point.

Écrivons les conditions d'optimalité à l'aide du théorème de Kuhn-Tucker. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(\mu_1,\mu_2,\mu_3) \in \mathbb{R}^3_+$ tels que

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 5.10^5 \\ -4.10^5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\lambda x \\ -2\lambda y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mu_1 \\ -\mu_2+\mu_3 \end{pmatrix} = 0 \\ x^2-y^2 = 9 \quad \text{et} \quad x\geq 0,\ y\in[3,10] \\ \mu_1 x = 0,\ \mu_2(3-y)=0,\ \mu_3(y-10)=0. \end{cases}$$

- $x=0$ est absurde car $x^2 = y^2+9$ donc $\mu_1 = 0$.

- Si $y=3$, alors $x=3\sqrt{2}$ et $\lambda = -\frac{5.10^5}{6\sqrt{2}}$, $\mu_3 = 0$ et $\mu_2 = -4.10^5 + \frac{5.10^5}{6\sqrt{2}}.3 < 0$, ce qui est impossible. Donc, $y>3$ et $\mu_2 = 0$.

- si $y=10$, alors $x=\sqrt{109}$, $\lambda = -\frac{5.10^5}{2\sqrt{109}}$ et $\mu_3 = 4.10^5 - 2.10.\frac{5.10^5}{2\sqrt{109}} < 0$, ce qui est impossible. Donc $y<10$ et $\mu_3 = 0$.

Finalement, $\lambda \neq 0$ nécessairement, puis $x = -\frac{5.10^5}{2\lambda}$ et $y = -\frac{4.10^5}{2\lambda}$. Puisque $x^2-y^2=9$, il vient $\lambda^{-2}.10^{10}(25-16) = 36$ donc $\lambda^2 = \frac{10^{10}}{4}$, soit $\lambda = -\frac{10^5}{2}$ (le signe de λ vient du fait que $x>0$). Ainsi,

$$\boxed{x=5 \quad \text{et} \quad y=4}.$$

4 Algorithmes numériques pour les problèmes d'optimisation

Exercice 13.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On désigne par $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$. Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b\in\mathbb{R}^n$ et $c\in\mathbb{R}$. On considère le problème d'optimisation quadratique

$$\inf_{x\in K} J(x) \quad \text{avec} \quad J(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle \quad \text{et} \quad K = \{x\in\mathbb{R}^n \mid \langle x,b\rangle = c\}.$$

Proposer une approche numérique de résolution que vous décrirez très précisément. On explicitera notamment l'étape de modélisation et l'algorithme retenu.

2. Soit $k>0$. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la fonction appelée *Rosenbrock banana*, par la relation

$$f(x,y) = (x-1)^2 + k(x^2-y)^2.$$

On souhaite minimiser f sur $\mathbb{R}^2$ à l'aide de la méthode du *gradient à pas optimal* à partir de l'initialisation $x_0 = (0,0)$.

Décrire cet algorithme. Montrer qu'il existe un choix optimal de pas à la première itération et qu'il appartient à $]0,1[$. De façon plus générale, comment feriez-vous pour déterminer numériquement le pas optimal à chaque itération ?

À votre avis, quel type de problème numérique rencontre cet algorithme lorsque k prend des valeurs trop grandes ?

Correction.

1. Une possibilité est de traiter la contrainte à l'aide d'une pénalisation, en traitant le problème sans contrainte :
$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad J_\varepsilon(x) = J(x) + \frac{1}{\varepsilon}(\langle x, b\rangle - c)^2,$$
où le paramètre ε est choisi petit. On peut alors mettre en œuvre une méthode de gradient sur ce problème. De plus, $\nabla J_\varepsilon(x) = Ax + \frac{2}{\varepsilon}(\langle x, b\rangle - c)b$. L'algorithme s'écrit alors :

   `- on se donne` $\rho \in \mathbb{R}$, `a priori assez petit et une initialisation` $x^{(0)}$
   `- poser` $k = 0$
   `tant que` $(\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_{\mathbb{R}^n} \geq \varepsilon)$ `et` $(k \leq k^{\max})$ `:`
   `calculer` $d^{(k)} = -\nabla J(x^{(k)})$
   `poser` $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \rho d^{(k)}$
   `fin tant que`

2. On pose $X = (x,y)$. L'algorithme du gradient à pas optimal s'écrit :

   `- on se donne une initialisation` $X^{(0)}$
   `- poser` $k = 0$
   `tant que` $(\left\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right\|_{\mathbb{R}^2} \geq \varepsilon)$ `et` $(k \leq k^{\max})$ `:`
   `calculer` $d^{(k)} = -\nabla f(X^{(k)})$
   `calculer` $\rho^{(k)} = \operatorname{argmin} f(X^{(k)} + \rho d^{(k)})$
   `poser` $X^{(k+1)} = X^{(k)} + \rho^{(k)} d^{(k)}$
   `fin tant que`

   Choix optimal du pas à l'iteration 1 : on calcule :
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x-1) + 4kx(x^2 - y) \\ -2k(x^2 - y) \end{pmatrix} \qquad \text{et donc } \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   Puisque
$$f((0,0)^\top - \rho \nabla f(0,0)) = f(2\rho, 0) = (2\rho - 1)^2 + 16k\rho^4,$$
   le pas optimal est solution du problème $\inf_{\rho\in\mathbb{R}} \varphi(\rho)$ avec $\varphi(\rho) = (2\rho-1)^2 + 16k\rho^4$. On vérifie aisément que cette fonction est coercive sur $\mathbb{R}$ qui est fermé de dimension finie, donc le problème précédent à une solution. De plus, les points critiques de φ résolvent l'équation $2(2\rho - 1) + 64k\rho^3 = 0$. Or, en tant que somme de deux fonctions strictement croissantes, la fonction $\rho \mapsto 2(2\rho-1) + 64k\rho^3$ est strictement croissante, vaut -2 en $\rho = 0$ et l'équation $2(2\rho-1) + 64k\rho^3 = 0$ possède donc une unique solution sur $\mathbb{R}$ qui est de surcroît positive. Cette solution est donc la valeur du pas optimale du pas. Notons d'ailleurs que d'après le théorème des valeurs intermédiaires, cette solution est dans $]0,1[$.

   De façon plus générale, on peut implémenter numériquement un algorithme de dichotomie ou de la section dorée pour résoudre le problème $\rho^{(k)} = \operatorname{argmin} f(X^{(k)} + \rho d^{(k)})$ (problème d'optimisation de dimension 1).

   Lorsque k prend des valeurs trop importantes, on rencontre des soucis numériques car le terme $k(x^2 - y)^2$ est prédominant devant le terme $(x-1)^2$. Donc, numériquement, tout se passe comme si on résolvait $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} (x^2 - y)^2$ au lieu du problème souhaité (on dit alors que le problème est mal conditionné, ce qui dépasse largement le cadre de ce cours).

Exercice 14. *(examen, juin 2018)* Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in S_n(\mathbb{R})$, définie positive, b et c, deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$, et $\alpha \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à la minimisation de la fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$définie par

$$F(X) = \frac{1}{2}\langle AX, X\rangle - \langle b, X\rangle,$$

sur l'ensemble de contraintes $C = \{X \in \mathbb{R}^n : \langle c, X\rangle = \alpha\}$.

1. Étudier l'existence et l'unicité de solutions, puis résoudre ce problème.

   On considère ici la méthode de dualité pour chercher numériquement un minimum de F sur C.

2. Définir le Lagrangien $\mathcal{L}$ associé à ce problème. On précisera son ensemble de définition.
3. Soient λ_0 et ρ, deux nombres positifs donnés.
   Écrire soigneusement l'algorithme d'Uzawa dont on notera les itérés (X_k, λ_k) en donnant les valeurs explicites de X_k et λ_k en fonction des termes d'ordre $k-1$. On utilisera une méthode de gradient à pas constant égal à ρ pour mettre à jour les multiplicateurs de Lagrange.
4. (a) Démontrer l'existence d'un valeur de ρ que l'on notera ρ_0 pour laquelle la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang 1.
   (b) Montrer qu'alors, $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ prend aussi une valeur constante. Quelle est cette valeur ?
5. Montrer que si $\rho \in]0, \rho_0[$, alors les suites $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
   Déterminer leurs limites.

Correction.

1. La fonction F est continue car polynomiale et coercive car $F(X) \geq \frac{\lambda_1}{2}\|X\|^2 - \|b\|\|X\|$, où $\lambda_1 > 0$ est la plus petite valeur propre de A. Puisque $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie et que C est fermé non vide (image réciproque de $\{\alpha\}$ par l'application linéaire $X \mapsto \langle c, X\rangle$. De plus, Hess $F(X) = A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc F est strictement convexe. Le problème $\inf_C F$ possède donc une unique solution.
   Résolvons ce problème. Soit X^* la solution. Notons que les contraintes sont qualifiées en X^* puisque, en notant $C(X) = \langle c, X\rangle - \alpha$, on a $\nabla C(X) = c \neq 0$. On peut donc appliquer le théorème des extrema liés qui fournit l'existence de $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tel que

   $$\nabla F(X^*) + \lambda^* \nabla C(X^*) = 0 \iff AX^* - b + \lambda^* c = 0.$$

   Pour déterminer λ^*, nous allons utiliser que $\langle c, X^*\rangle = \alpha$. il vient : $X^* = A^{-1}(b - \lambda^* c)$, puis $\alpha = \langle A^{-1}b, c\rangle - \lambda^*\langle A^{-1}c, c\rangle$. Finalement,

   $$X^* = A^{-1}b - \frac{\langle A^{-1}b, c\rangle - \alpha}{\langle c, A^{-1}c\rangle} A^{-1}c.$$

2. $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est défini par $\mathcal{L}(x, \lambda) = F(X) + \lambda(\langle c, X\rangle - \alpha)$.
3. On se donne $tol > 0$. Notons que $\nabla_X \mathcal{L}(X, \lambda) = AX - b + \lambda_k c$ et $\nabla_\lambda \mathcal{L}(X, \lambda) = \langle c, X\rangle - \alpha$.

Algorithme d'Uzawa

$\lambda_0 > 0$, $\rho > 0$ sont donnés.
<u>à l'iteration k</u> :
$AX_k - b + \lambda_k c = 0 \iff X_k = A^{-1}(b - \lambda_k c)$
$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \rho(\langle c, X_k\rangle - \alpha)$
<u>Arrêt</u> lorsque $\|X_{k+1} - X_k\| + |\lambda_{k+1} - \lambda_k| < tol$

---

4. (a) $\lambda_2 - \lambda_1 = \rho(\langle c, X_1\rangle - \alpha) = \rho(\langle c, A^{-1}(b - \lambda_1 c)\rangle - \alpha) = \rho\left(-\lambda_1\langle c, A^{-1}c\rangle + \langle c, A^{-1}b\rangle - \alpha\right)$. Puisque $\lambda_1 = \lambda_0 + \rho(\langle c, X_0\rangle - \alpha)$ et $X_0 = A^{-1}(b - \lambda_0 c)$, il vient

$$\begin{aligned}
\lambda_2 - \lambda_1 &= \rho\left(-\rho(\langle c, X_0\rangle - \alpha)\langle c, A^{-1}c\rangle - \lambda_0\langle c, A^{-1}c\rangle + \langle c, A^{-1}b\rangle - \alpha\right)\\
&= \rho\left(-\rho(\langle c, A^{-1}b\rangle - \lambda_0\langle c, A^{-1}c\rangle - \alpha)\langle c, A^{-1}c\rangle - \lambda_0\langle c, A^{-1}c\rangle + \langle c, A^{-1}b\rangle - \alpha\right)\\
&= \rho\left(\langle c, A^{-1}b\rangle - \lambda_0\langle c, A^{-1}c\rangle - \alpha\right)\left(-\rho\langle c, A^{-1}c\rangle + 1\right)
\end{aligned}$$

Par conséquent, si on choisit $\rho = \rho_0$ avec $\rho_0 = 1/\langle c, A^{-1}c\rangle$, on a $\lambda_2 = \lambda_1$. Dans ce cas, on a $\langle c, X_1\rangle = \alpha$. On calcule alors

$$\langle c, X_2\rangle = \langle c, A^{-1}b\rangle - \lambda_2\langle c, A^{-1}c\rangle = \langle c, A^{-1}b\rangle - \lambda_1\langle c, A^{-1}c\rangle = \alpha$$

donc $\lambda_3 - \lambda_2 = 0$ et d'après le calcul précédent. Par récurrence immédiate, on en déduit que la suite $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ est donc stationnaire et on a : $\lambda_k = \frac{\langle A^{-1}b, c\rangle - \alpha}{\langle c, A^{-1}c\rangle}$ pour tout $k \geq 1$.

(b) Pour un tel choix de ρ et pour $k \geq 1$, on a :

$$X_k = A^{-1}(b - \lambda_k c) = A^{-1}b - \frac{\langle A^{-1}b, c\rangle - \alpha}{\langle c, A^{-1}c\rangle}A^{-1}c = X^*.$$

5. On a $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \rho(\langle c, X_k\rangle - \alpha)$ et $\langle X_k, c\rangle = \langle A^{-1}b, c\rangle - \lambda_k\langle A^{-1}c, c\rangle$ donc

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k\left(1 - \rho\langle A^{-1}c, c\rangle\right) + \rho\left(\langle A^{-1}b, c\rangle - \alpha\right)$$

On reconnaît une suite arithmético-géométrique qui converge donc si $|1 - \rho\langle A^{-1}c, c\rangle| < 1$, autrement dit si $0 < \rho < \rho_0 = 1/\langle A^{-1}c, c\rangle$, vers $\lambda^* = \frac{\langle A^{-1}b, c\rangle - \alpha}{\langle c, A^{-1}c\rangle}$. De plus, puisque $X_k = A^{-1}(b - \lambda_k c)$, il vient que $(X_k)_{k\geq 0}$ converge vers X^*.