optimisation sous contraintes
E. gasmi Bouthenia
2021 / 2022.

Série TD n°=1.

Exo(1)

Soit la fonction f définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1/ Etudier la continuité de f et la dérivabilité sur $\mathbb{R}^2$.

2/ Est-ce que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?.

3/ Calculer le gradient et la matrice Hessienne de f sur $\mathbb{R}^2$.

4/ Soit la fonction g donnée par:

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que g admet des dérivées partielles au point $(0,0)$ mais n'est pas continue en $(0,0)$.

Exo(2):

On considère la fonction f définie par:

$$f(x,y) = x^4+y^4-2(x-y)^2$$

1/ Est-ce que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$?.

2/ Calculer le gradient et la matrice Hessienne de f.

3/ Montrer qu'il existe $(\alpha,B) \in \mathbb{R}^2$ (et les déterminer) telque:

$$f(x,y) \geq \alpha\left(\|(x,y)\|_2^2\right) + \beta : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

4/ Etudier la convexitée de f sur $\mathbb{R}^2$;

5/ déterminer les points critique (les extrimas) de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exo(3):

Etudier la convexitée des ensembles suivantes:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y - x^2 \geq 0\}$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy \geq 1 \text{ et } x > 0\}$$

Exo(4):

soient C_1 et C_2 deux ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$; Montrer que:

$aC_1 + bC_2$: $a,b \in \mathbb{R}$: est convexe dans $\mathbb{R}^n$; où:

$$aC_1 + bC_2 = \{ax_1 + bx_2 : x_1 \in C_1 \text{ et } x_2 \in C_2 : a,b \in \mathbb{R}\}$$

*/ que peut on dire pour les ensembles suivantes:

$$E_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i C_i : \{a_i\}_{i=\overline{1,n}} \in \mathbb{R} \text{ , } \{C_i\}_{i=\overline{1,n}} \text{ des convexes de } \mathbb{R}^n.$$

$$E_2 = \prod_{i=1}^{n} C_i \text{ ; } E_3 = \bigcap_{i=1}^{n} C_i \text{ , } E_4 = \bigcup_{i=1}^{n} C_i \text{ et pourquoi?}$$

Solution de TD (1):

Exo(1): Soit la fonction f définie par:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{ailleurs.}\end{cases}$$

1/ L'étude de la continuité de f sur leur domaine de définition :

(on a: $D_f=\mathbb{R}^2$;

la fonction $(x,y)\mapsto x^3+y^3$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2$

d'autre part; la fonction $(x,y)\mapsto x^2+y^2$ est aussi définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2$; alors; la fonction $(x,y)\mapsto \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=f(x,y)$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$.

Reste à étudier la continuité et la dérivabilité de f au point $(0,0)$; on a:

$$0\leq |f(x,y)|=\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|\leq\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \quad \text{alors:}$$

$$0\leq\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}|f(x,y)|\leq\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}\left(\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right|\right)$$

$$=\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|+\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}\left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right|$$

$$=\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}|x|+\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}|y| \quad \text{donc:}$$

$$\left(0\leq\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}|f(x,y)|\leq 0\right)\Leftrightarrow\left(\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}|f(x,y)|=0\right).$$

alors;

$$\left(\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(x,y)=0\right) \Leftrightarrow \left(f \text{ est continue au point } (0,0)\right).$$

finalement, on trouve que f est continue sur $\mathbb{R}^2$;

d'autre part, on a:

pour $(x,y)=(0,0)$ on a: $f(x,y)=0$ ... (la fonction constante)

donc; elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2$;

alors; f est continue sur $\mathbb{R}^2$; #

Reste à étudier la dérivabilité de f au point $(0,0)$.

on a: f est dérivable sur $\mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$, et on a aussi:

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(tx,ty)-f(0,0)}{t}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{t^3(x^3+y^3)}{t^3(x^2+y^2)}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \quad \therefore \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$$

Remarquons que la limite existe mais n'est pas unique, alors;

f n'est pas dérivable au point $(0,0)$. et la dérivée (f') n'est pas continue au point $(0,0)$ qui implique que (f) n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$;

3/ Calculons le gradient de f:

par définition on a: $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$.

alors;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{3x^4+3x^2y^2-2x^4-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

donc:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

d'autre part;

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^2(x^2+y^2) - 2y(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{3y^2x^2+3y^4-2yx^3-2y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

alors;

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y^4+3y^2x^2-2yx^3}{(x^2+y^2)^2}$$, donc; le gradient de f est :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \\ \\ \frac{y^4+3x^2y^2-2yx^3}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

La matrice Hessienne de f sur $\mathbb{R}^2$:

→/ pour $(x,y) \neq (0,0)$ on a:

$$\nabla^2 f(x,y) = \text{Hess}(f)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

$= ?$ (faire les calcules).

→/ pour $(x,y)=(0,0)$, la Hessienne en $(0,0)$ ~~n'est~~ n'existe pas ;

5/ soit la fonction g définie par:

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrons que g admet des dérivées partielles au point $(0,0)$ mais n'est pas continue en $(0,0)$; on a:

$$\lim_{t \to 0} \left(\frac{g(t,0) - g(0,0)}{t} \right) = 0 = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$$

et:

$$\lim_{t \to 0} \left(\frac{g(0,t) - g(0,0)}{t} \right) = 1.$$; donc; les dérivées partiels de g existent en $(0,0)$: d'autre part, on a:

$\lim_{(x,y) \to (0,0)} g(x,y)$ n'existe pas ; alors; g n'est pas continue en $(0,0)$

alors, on écrit ; [g est continue $\not\Leftarrow$ g est dérivable] pour g une fonction quelconque, pour l'exercice, on trouve que g est dérivable au point $(0,0)$ mais n'est pas continue en $(0,0)$. #

Exo(2):

on considère la fonction f définie par:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

1/ la fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2$; alors;

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$; (la fonction polynomial);

2/ Calculons le gradient de f sur $\mathbb{R}^2$;

par définition on a:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4x + 4y \\ 4y^3 - 4y + 4x \end{pmatrix}$$

3/ Calculons la Hessienne de f sur $\mathbb{R}^2$:

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x,y) = 4 \begin{pmatrix} 3x^2 - 1 & 1 \\ 1 & 3y^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

4/ Montrons qu'il existe (α, β) / et les déterminer telque :

$$\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R}_+^* & : \quad f(x,y) \geq \alpha(\|(x,y)\|_2^2) + \beta \; ; \; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \\ \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

on a : f est définie, contine et dérivable sur $\mathbb{R}^2$ $\left(f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2) \right)$;

et on a aussi :

$$(x+y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x^2+y^2+2xy \geq 0 \right)$$
$$\Leftrightarrow \left(xy \geq \frac{-1}{2}(x^2+y^2) \right) \; : \; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4+y^4-2(x-y)^2 \\ &= x^4+y^4-2\left(x^2+y^2-2xy\right) \\ &= x^4+y^4-2x^2-2y^2+4xy \\ &\geq x^4+y^4-2(x^2+y^2)+4\left(\frac{-1}{2}(x^2+y^2)\right) \\ &= x^4+y^4-2(x^2+y^2)-2(x^2+y^2) \\ &= x^4+y^4-4(x^2+y^2) . \end{aligned}$$

d'autre part, on a :

$$\forall \varepsilon \geq 0 : (x^2-\varepsilon)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^4-2\varepsilon x^2+\varepsilon^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^4 \geq 2\varepsilon x^2-\varepsilon^2 \right)$$

et : $(y^2-\varepsilon)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(y^4 \geq 2\varepsilon y^2-\varepsilon^2 \right)$. , donc;

$$\begin{aligned} f(x,y) &\geq \left(2\varepsilon x^2-\varepsilon^2\right)+\left(2\varepsilon y^2-\varepsilon^2\right)-4(x^2+y^2) \\ &= 2\varepsilon(x^2+y^2)-4(x^2+y^2)-2\varepsilon^2 \\ &= 2(\varepsilon-2)(x^2+y^2)-2\varepsilon^2 \; : \; \forall \varepsilon > 0 . \end{aligned}$$

donc:

$$f(x,y) \geq 2(\varepsilon-2)\,\|(x,y)\|_2^2 - 2\varepsilon^2 : \forall \varepsilon > 0$$

$$\geq \alpha \|(x,y)\|_2^2 - 2\varepsilon^2 : \quad \text{Telque:}$$

$\alpha = 2(\varepsilon-2) > 0$ et $\beta = -2\varepsilon^2$: alors;

$$(\alpha = 2(\varepsilon-2) > 0) \Leftrightarrow (\varepsilon-2) > 0$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon > 2 : \quad \text{donc:}$$

pour $\varepsilon = 3$ on a:

$$\begin{cases} \alpha = 2(\varepsilon-2) = 2 \\ \beta = -2\varepsilon^2 = -18. \end{cases} \quad \text{donc:}$$

$\exists (\alpha, \beta) = (2, -18) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$: telque:

$$f(x,y) \geq 2(\|(x,y)\|_2^2) + \beta.$$

ici; la fonction f est coercive; et bornée inférieurement

donc; elle admet des extremums inférieurs dans $\mathbb{R}^2$;

5/ la convexitée de f sur $\mathbb{R}^2$;

pour étudier la convexitée de f il faut trouver la nature de la dérivée deuxième de f qui présente la matrice Hessienne: alors:

$$\nabla^2 f(x,y) = 4\begin{pmatrix} 3x^2-1 & 1 \\ 1 & 3y^2-1 \end{pmatrix}$$

on a: $tr\left(\nabla^2 f(x,y)\right) = \left((3x^2-1)+(3y^2-1)\right)\times 4$: polynôme et

$det\left(\nabla^2 f(x,y)\right) = \left((3x^2-1)(3y^2-1)-1\right)\times 4$: polynôme ; donc;

la matrice Heussienne n'est pas définie positive, alors, on peut rien dire sur la nature de f et dans ce cas, on dit que f n'est pas convexe sur $\mathbb{R}^2$;

6/ les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$:

on calcule les points critiques de f comme suit:

$$[\nabla f(x,y)=0] \Leftrightarrow \left[\left(4\left(x^3-(x-y)\right)\right)=0 \text{ et } \left(4\left(y^3-(y-x)\right)=0\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\underbrace{\left(x^3-(x-y)\right)=0}_{(1)} \text{ et } \underbrace{\left(y^3-(y-x)\right)=0}_{(2)}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = x-y \\ \text{et} \\ y^3+(x-y)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = x-y \\ \text{et} \\ y^3 = -x^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = -y^3 \\ \text{et} \\ y^3+(x-y)=0 \end{cases}$$

alors ;

$$(1)-(2) \Leftrightarrow \left(x^3 - (x-y) - y^3 - (x-y) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3 - 2x + 2y - y^3 = 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3 - 2x + 2y + x^3 = 0 \right) ; \text{puisque} : (x^3 = -y^3)$$

$$\Leftrightarrow \left(2x^3 - 2x - 2x = 0 \right) : \text{puisque } (y = -x)$$

$$\Leftrightarrow \left(2x^3 - 4x = 0 \right).$$

$$\Leftrightarrow \left(2x (x^2 - 2) = 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \vee \\ x^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \vee \\ x = \pm 2 . \end{cases}$$

donc, on a trouvé trois points critiques de f :

$$a(0,0) \, , \, b(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \, , \, c(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) .$$

7/ la nature des points critiques :

→/ pour le point $a(0,0)$ on a :

$$A = \text{Hess}(f)_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 0$ et $tr(A) = -8$ donc les valeurs propres de la matrice Hessienne sont $\{0, -8\}$ alors la matrice Hessienne est indéfinie au point $(0,0)$, donc, on peut rien dire #.

→/ pour le point $b(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ on a :

$$B = \text{Hess}(f)_{(\sqrt{2}, -\sqrt{2})} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

$\det(B) = 384$ et $tr(B) = 40$, donc; la matrice Hessienne admet deux valeurs propre strictement positives, alors B est strictement définie positive; qui implique que f est strictement convexe et le point $b(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ présente un minimum local stricte de f #.

→/ pour le point $c(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ on a:

la même chose que b; on trouve que:

$c(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ est un minimum local stricte de f #.