Solution TD(2) :

optimisation sous contraintes / égalités :

EXO(1) :

1/ Est-ce que la fonction (f_a) est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2$? :

on a (f_a) est une fonction polynomial sur $\mathbb{R}^2$; alors;

(f_a) est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2$;

2/ Est-ce que (f_a) est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$? :

oui ; (f_a) est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$; et on écrit: $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$:

3/ Calculons le gradient est la matrice Heussienne de (f_a) :

$$\nabla f_a(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_a}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f_a}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x + ay - 2 \\ 2y + ax - 2 \end{pmatrix}$$ est le gradient de (f_a).

la Heussienne de (f_a) est :

$$Heuss(f_a)_{(x,y)} = \nabla(\nabla f_a(x,y)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_a}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f_a}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f_a}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f_a}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}$$

4/ on a : $\text{Hess}(f_a)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}$. alors ;

$tr\left(\text{Hess}(f_a)_{(x,y)}\right) = 4 = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i > 0$ où $(\lambda_i)_{i=1,2}$ sont les valeurs propres de $\left(\text{Hess}(f_a)_{(x,y)}\right)$; et on a :

$\det\left(\text{Hess}(f_a)_{(x,y)}\right) = 4 - a^2$. donc :

$$\left[\det\left(\text{Hess}(f_a)_{(x,y)}\right) = 0\right] \Leftrightarrow \left[4 - a^2 = 0\right]$$
$$\Leftrightarrow \left[(2-a)(2+a) = 0\right]$$
$$\Leftrightarrow \left[a = 2 \vee a = -2\right] \rightsquigarrow (1)$$

donc :

1/ $\left[\det\left(\text{Hess}(f_a)_{(x,y)}\right) \geq 0\right] \Leftrightarrow \left[a \in [-2, 2]\right]$: ~~est~~ dans ce cas la matrice Hessienne de (f_a) est semi-définie positive ; alors. (f_a) est convexe.

3/ $\left[\det\left(\text{Hess}(f_a)_{(x,y)}\right) < 0\right] \Leftrightarrow \left[a \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\right]$, dans le cas la matrice Hessienne est strictement définie négative, alors (f_a) est strictement concave ; d'autre part, on a trouvé que : $tr\left(\text{Hess}(f_a)_{(x,y)}\right) = 4 = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i > 0$, donc : la fonction (f_a) n'est ~~[illegible]~~ jamais ~~a~~ concave, alors ; ce cas est Réfusé.

4/ si $a \in]-2, 2[$ alors ; la Hessienne de (f_a) est strictement définie positive alors ; (f_a) est strictement convexe.

finalement on trouve que la fonction (f_a) est convexe sur $\mathbb{R}^2$ si

$a \in [-2,2]$ #

5/ L'existence des solutions de (P) défini par:

$$\begin{cases} \text{Min } f_a(x,y) \\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \longrightarrow (P)$$

on a les cas suivants:

pour $a \in]-\infty,-2[\cup]+2,+\infty[$ on a:

la fonction (f_a) n'est pas convexe alors; le problème (P) n'admet pas des solutions.

pour $a \in [-2,2]$ on a:

la fonction (f_a) est convexe, alors le problème (P) admet au moins une solution optimal local.

pour $a \in]-2,2[$ on a:

la fonction (f_a) est strictement convexe; alors le problème (P) admet une solution optimal unique, et on dit aussi une solution optimal local strict.

6/ Résoudre le problème d'optimisation (P):

on donne la résolution de (P) pour $a \in]-2,2[$ où la fonction (f_a) est strictement convexe; et la solution est unique; alors, on a la condition nécessaire mais n'est pas suffisante suivante:

$$\left[(x^*,y^*) \begin{pmatrix} \text{solution} \\ \text{optimal} \end{pmatrix} \text{de } (P) \right] \Rightarrow \left[\nabla f_a(x^*,y^*) = 0 \right].$$ donc;

on calculons des points critique de (f_a) : avec :

$$\left[\nabla f_a(x,y)=0\right] \Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} 2x+ay-2 \\ 2y+ax-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+ay-2=0 \\ 2y+ax-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2-ay \\ 2y = 2-ax \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2(2-ay) \\ y = 1/2(2-ax) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ y = 1/2\left(2-a\left(\underbrace{1/2(2-ay)}_{x}\right)\right) \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left[y = 1 - 1/4\, a\,(2-ay)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[y = 1 - 1/2\, a + 1/4\, a^2 y\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[y - 1/4\, a^2 y = 1 - 1/2\, a\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[y\left(1 - 1/4\, a^2\right) = 1 - 1/2\, a\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[y = \frac{\left(1-\frac{a}{2}\right)}{\left(1-\frac{a^2}{4}\right)}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[y = \frac{\left(1-\frac{a}{2}\right)}{\left(1-\frac{a}{2}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[y = \frac{1}{\left(1+\frac{a}{2}\right)}\right]$$ donc ;

$$\left[y=\frac{1}{\left(\frac{2+a}{2}\right)}\right]\Leftrightarrow\left[y=\frac{2}{a+2}\right]$$; pour $a\in]-2,2[$. et on a aussi:

$$\left[x=\tfrac{1}{2}(2-ay)\right]\Leftrightarrow\left[x=\tfrac{1}{2}\left(2-a\left(\frac{2}{a+2}\right)\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow\left[x=1-\frac{1}{2}\left(\frac{2a}{a+2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow\left[x=1-\frac{a}{a+2}\right]$$

$$\Leftrightarrow\left[x=\frac{a+2-a}{a+2}\right]$$

$$\Leftrightarrow\left[x=\frac{2}{a+2}\right]$$ pour $a\in]-2,2[$.

donc: la solution optimal strict de $(\mathcal{P}_a)$ pour $a\in]-2,2[$ est:

$(x^*,y^*)=\left(\frac{2}{a+2},\frac{2}{a+2}\right)$; et la valeur optimal associée est:

$$f_a(x^*,y^*)=f_a\left(\frac{2}{a+2},\frac{2}{a+2}\right)$$

$$=\left(\frac{2}{a+2}\right)^2+\left(\frac{2}{a+2}\right)^2+a\left(\frac{2}{a+2}\right)\left(\frac{2}{a+2}\right)-2\left(\frac{2}{a+2}\right)-2\left(\frac{2}{a+2}\right)$$

$$=(2+a)\left(\frac{2}{a+2}\right)^2-4\left(\frac{2}{a+2}\right)$$

$$=\frac{4(2+a)}{(a+2)^2}-\frac{8}{a+2}.$$

$$=\frac{4}{a+2}-\frac{8}{a+2}.$$

$$f_a(x^*,y^*)=\frac{-4}{a+2}$$; $a\in]-2,2[$. #