Exemple :

la relation " $\leq$ " sur IR est une relation d'ordre totale.

Nous avons donc ;

1/ $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x$ ...... (Réflexive).

2/ $\forall x, y \in \mathbb{R}$; si $\begin{cases} x \leq y \\ \text{et} \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow x = y$ .... (anti-symétrique).

3/ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$: si $\begin{cases} x \leq y \\ \text{et} \\ y \leq z \end{cases} \Rightarrow x \leq z$ .... (transitive).

3/ IR est un corps archimédien.

IR est archimédien, c.à.d :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : n > x.$$ c.à.d :

pour tout réel x ; il existe un entier naturel n strictement plus grand que x.

Remarque :

on va utiliser cette propriété dans la partie entière.

4/ IR est un corps valué :

Un corps valué est un corps muni d'une valeur absolue

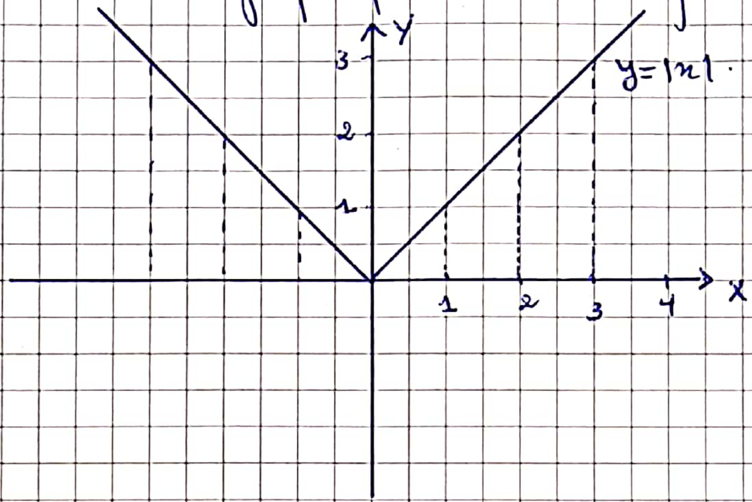
$x \longmapsto |x|$.

pour le corps IR ; on définit la valeur absolue de $x \in \mathbb{R}$ par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

La représentation graphique de cette fonction est donnée par :



proposition : $\forall x \in \mathbb{R}$: on a :

1/ $\begin{cases} |x| \geq 0 : \\ |-x| = |x| \\ |x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \end{cases}$

2/ $\sqrt{x^2} = |x|$:

3/ $|xy| = |x||y|$.

4/ $|x+y| \leq |x| + |y|$ $\rightsquigarrow$ (L'inégalité triangulaire).

5/ $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$.

5/ **Les intervalles dans $\mathbb{R}$** :

Définition :

un intervalle de $\mathbb{R}$ est un sous ensemble I de $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$[\forall a, b \in I \ ; \ \forall x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b \implies x \in I]$$

Remarque :

L'ensemble vide est intervalle (par définition), et on écrit :

$I = \emptyset$.

d'autre part ;

Scanné avec CamScanner

$I = \mathbb{R}$ est aussi un intervalle.

On peut regrouper les intervalle comme suit :

* $\{x \in \mathbb{R} / \ a < x < b\} =]a, b[$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$;
* $\{x \in \mathbb{R} / \ a \leq x \leq b\} = [a, b]$ intervalle fermé de $\mathbb{R}$;
* $\{x \in \mathbb{R} / \ a < x \leq b\} =]a, b]$ intervalle semi-ouvert à gauche de $\mathbb{R}$;
* $\{x \in \mathbb{R} / \ a \leq x < b\} = [a, b[$ intervalle semi-ouvert à droite de $\mathbb{R}$.
* $\{x \in \mathbb{R} / \ x < a\} =]-\infty, a[$;
* $\{x \in \mathbb{R} / \ x \leq a\} =]-\infty, a]$;
* $\{x \in \mathbb{R} / \ x > a\} =]a, +\infty[$
* $\{x \in \mathbb{R} / \ x \geq a\} = [a, +\infty[$.

6/ Bornes supérieurs et inférieurs d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$:

6.1/ Maximum et Minimum d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$:

Définition : Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}$;

Un réel a est un plus grand élément de A si :

$[a \in A$ et : $\forall x \in A ; \ x \leq a]$ dans le cas d'existance ;

S'il existe le plus grand élément de A, et si il est unique - on le note par: [max A]

- le plus petit élément de A, noté [Min A] - dans le cas d'existance - est le réel a qui vérifié :

$[a \in A$ et $: \forall x \in A : x \geq a]$.

Remarque:

Il faut gardés à l'esprit que le max et le min n'existe pas Toujours ;

Exemples:

1/ soit l'ensemble A défini par:

$A = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$; dans ce cas,

$$\begin{cases} \text{Max } A = b \\ \text{Min } A = a \end{cases}$$

2/ si $A =]a, b[$ alors; ici; le Max et le Min de A n'existent pas dans $\mathbb{R}$;

3/ soit l'ensemble $B = [0, 1]$ donc;

$\text{Max } B = 1$, $\text{Min } B = 0$.

- si : $B = [0, 1[$ alors; $\text{Min } B = 0$, ($\text{Max } B$) n'existe pas.

- si : $B =]0, 1]$ alors; $\text{Max } B = 1$, ($\text{Min } B$) n'existe pas dans $\mathbb{R}$.

4/ soit $A \subseteq \mathbb{R}$ définie par:

$$A = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

ici: pour $n = 1$ on a:

$$1 - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{1} = 0$$

donc; Min A existe dans $\mathbb{R}$ et: Min A = 0.

d'autre part;

pour $n = +\infty$ on a:

$$1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{\text{Tend vers}} 1 \notin A.$$

donc; le (Max A) n'existe pas dans $\mathbb{R}$;

6.2/ le (les) Majorants et le (les) Minorants d'un ensemble de $\mathbb{R}$;

soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$; c.à.d: $A \neq \emptyset$.

→/ Un réel M est un majorant de A si:

$$[\forall x \in A : x \leq M]$$

→/ Un réel m est un minorant de A si:

$$[\forall x \in A : x \geq m].$$

Exemples :

1/ Soit l'ensemble A de $\mathbb{R}$ défini par :

$A =]0,2[$ alors : ici :

3 est un majorant de A mais n'est pas un maximum de A.

puisque : $3 \notin A =]0,2[$; d'autre part, on a :

$0, -1, -2$ sont des minorants de A, et le minimum

de A n'existe pas ;

2/ Si : $A =]0, +\infty[$ alors ;

A n'admet pas des majorants dans $\mathbb{R}$, d'autre part ;

$(-7), -11, 0$ sont des minorants de A dans $\mathbb{R}$;

Remarque :

1/ Si un majorant (resp : un minorant) de A existe

on dit que l'ensemble A est majorée (resp. minorée)

dans $\mathbb{R}$;

2/ Les majorants et les minorants d'un ensemble de $\mathbb{R}$

n'existent pas toujours dans $\mathbb{R}$;