Université de Batna 2
Faculté des Mathématiques et d'informatique
Département Socle Commun Mathématiques et Informatique
Année Universitaire : 2020/2021
1re année MI
Module : Analyse 1

Série de Td N:-01 (Nombres réels)

Exercice 01:

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, démontrer les inégalités suivantes :

1. $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$
2. $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$
3. $\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$
4. $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$
5. $xy + yz + xz \leq x^2 + y^2 + z^2$

Exercice 02:

1. Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel
2. Montrer que $x = 31.72356356356....$ est un rationnel.

Exercice 03:
rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1. Montrer que $\alpha = 6 + 4\sqrt{2}$, $\beta = 6 - 4\sqrt{2}$ sont irrationnels.
2. Calculer $\sqrt{\alpha\beta}$
3. Montrer que $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ est rationnel.

Exercice 04:

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, montrer que :

1. $f(x) = \lfloor x \rfloor$ est une fonction croissante
2. $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*; \lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor = \lfloor x \rfloor$

Remarque :-Le symbole $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

Exercice 05:

Soient A et B deux parties non-vides et bornées de $\mathbb{R}$. On note $-\mathrm{A} = \{-x/x \in \mathrm{A}\}$. Montrer que :

1. $sup(-\mathrm{A}) = -inf(\mathrm{A})$
2. $inf(-\mathrm{A}) = -sup(\mathrm{A})$
3. si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ alors
$$\begin{cases} sup(\mathrm{A}) \leq sup(\mathrm{B}) \\ inf(\mathrm{B}) \leq inf(\mathrm{A}) \end{cases}$$
4. $sup(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = max(sup(\mathrm{A}), sup(\mathrm{B}))$
5. $inf(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = min(inf(\mathrm{A}), inf(\mathrm{B}))$

Exercice 06:

Determiner (s'ils existent) la borne inférieure, la borne supérieure, le plus petit élément et le plus grand élément des ensemble suivants :

1. $\mathrm{A}_1 = [1, 2] \cap \mathbb{Q}$
2. $\mathrm{A}_2 = [1, 2[\cap \mathbb{Q}$
3. $\mathrm{A}_3 = \{u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1} / n \in \mathbb{N}\}$
4. $\mathrm{A}_4 = \{x \in \mathbb{R}; x^2 < 1\}$
5. $\mathrm{A}_5 = \{x \in \mathbb{R} / -1 < \frac{2x}{x^2+1} < 1\}$
6. $\mathrm{A}_6 = \{u_n = sin(\frac{2n\pi}{7}) / n \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 07:

Soient $a, b \in \mathbb{Q}$, tel que $a < b$. Montrer que :

$$\exists c \in \mathbb{Q}; \quad a < c < b$$