Chapitre II : Rappels sur la Transformée de Laplace

Introduction

La transformée de Laplace permet de convertir une équation différentielle en une équation linéaire où disparaissent les formes dérivées.

II.1. Définition

Soit *f(t)* une fonction du temps. Sa *transformée de Laplace F(p)* est définie par :

$$\boxed{F(p)=\int_0^{+\infty} f(t).e^{-p.t}.dt}$$

Avec p une variable complexe.

On note F(p) = L [f(t)] et f(t) = L $^{-1}$[F(p)] et on dit que F(p) est la transformée de Laplace de f(t) et que f(t) est l'original de F(p).

$$f(t) \xrightarrow{L} F(p) \text{ et } F(p) \xrightarrow{L^{-1}} f(t)$$

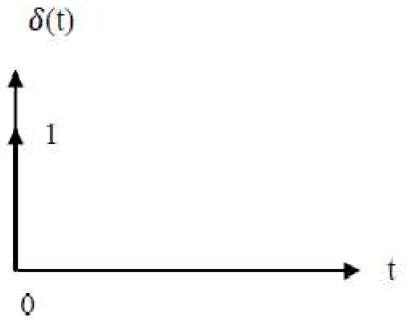
$$x(t)=L^{-1}(X(s))=\frac{1}{2\pi j}\cdot\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)\cdot e^{ts}\cdot ds$$

La transformée de Laplace donc permet de transformer le problème du domaine du temps au domaine de la fréquence.

II.2. Les signaux usuels et leurs transformées

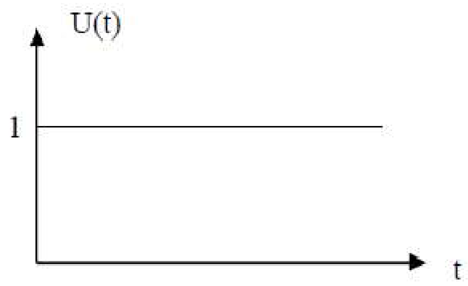
1- Le signal Dirac

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) \exp(-pt)\,dt = 1$$



2- Le signal Echelon unitaire

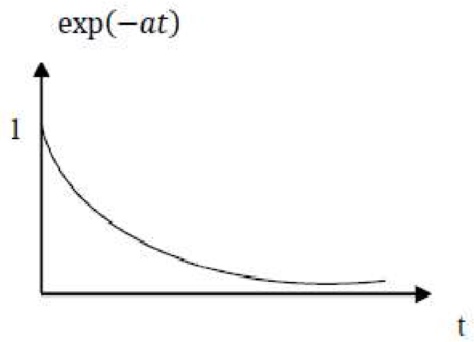
$$L[u(t)] = \int_0^{\infty} u(t) \exp(-pt)\,dt = \left(-\frac{1}{p}\right)\left[\exp(-pt)\right]_0^{\infty} = \frac{1}{p}$$



3- Le signal exponentiel

$$L[\exp(-at)u(t)] = \int_0^{\infty} \exp(-at)\exp(-pt)\,dt$$

$$= \left(-\frac{1}{p+a}\right)\left[\exp-(p+a)t\right]_0^{\infty} = \frac{1}{p+a}$$

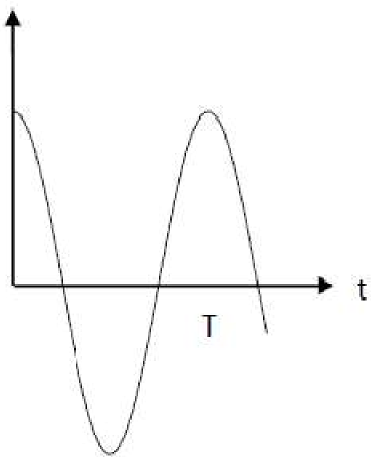


4- Le signal sinusoïdal

$$L[\cos(wt)u(t)] = L\left(\left(\frac{\exp(-jwt)+\exp(jwt)}{2}\right)u(t)\right)$$

$$= \int_0^{\infty}\left(\frac{\exp(-jwt)+\exp(jwt)}{2}\right)\exp(-pt)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+jw}+\frac{1}{p-jw}\right) = \frac{p}{p^2+w^2}$$



Principales propriétés

Les principales propriétés de la transformée de Laplace sont :

Linéarité :

Soient a et b deux constantes, la fonction f(t) = a.f1(t) + b.f2(t) a pour transformée de Laplace : F(p)= a.F1(p) + b.F2(p).

$$\boxed{f(t) = a.f1(t) + b.f2(t) \xrightarrow{L} F(p) = a.F1(p) + b.F2(p)}$$

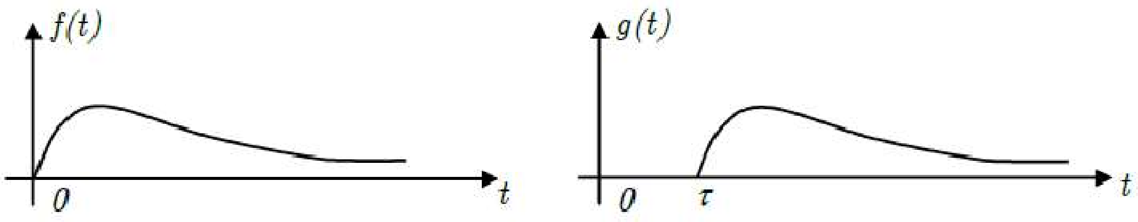
Translation :

La fonction $g(t) = f(t).e^{-a.t}$ a pour transformée de Laplace G(p) =F(p+a).

$$\boxed{g(t) = f(t).e^{-a.t} \xrightarrow{L} G(p) = F(p+a)}$$

Théorème du retard :

Soit f une fonction dont la transformée de Laplace est F et soit g la fonction présentant un retard τ par rapport à f telle que $g(t)=f(t-\tau)$, alors on a :



$$\boxed{g(t) = f(t-\tau) \xrightarrow{L} G(p) = F(p).e^{-\tau.p}}$$

Dérivation et intégration

La dérivation d'une fonction s'écrit

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = p\,F(P) - f(0^+)$$

Nous pouvons généraliser ce résultat. Par exemple pour la dérivée seconde :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]\right\} = P\,\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] - \frac{df(0^+)}{dt}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = P[PF(P) - f(0^+)] - \frac{df(0)}{dt} = P^2F(P) - Pf(0) - \frac{df(0^+)}{dt}$$

$$L[f(t)] = F(P)$$

$$L[f'(t)] = P.F(P) - f(0)$$

$$L[f''(t)] = P.[P.F(P) - f(0)] - f'(0) = P^2.F(P) - P.f(0) - f'(0)$$

$$L[f'''(t)] = P.[P.[P.F(P) - f(0)] - f'(0)] - f''(0) = P^3.F(P) - P^2.f(0) - P.f'(0) - f''(0)$$

De manière générale :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right] = P^n\,F(P) - \sum_{k=0}^{n-1} P^{n-1-k}\, f^k(0) \quad \text{avec } f^{(k)}(0) = \frac{d^kf(0)}{dt^k}$$

L'intégration d'une fonction d'écrit :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^{\infty} f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(P)}{P}$$

Théorèmes des limites

Théorème de la valeur initiale :

$$\boxed{f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to+\infty} p.F(p)}$$

Théorème de la valeur finale :

$$\boxed{f(+\infty) = \lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} p.F(p)}$$

Transformée de Laplace inverse

Il faut donc développer des méthodes pour retrouver une fonction *f*(*t*) lorsqu'on connaît sa transformée *F*(*p*). On peut, `a partir de la table, trouver quelques transformées inverses. On considèrera quelques théorèmes utiles pour en trouver d'autres.

- **Exemples :**

1) $F(p) = \frac{3p+7}{p^2-2p-3} = \frac{4}{p-3} - \frac{1}{p+1}$ $donc\ f(t) = (4e^{3t} - e^{-t})U(t)$
2) $F(p) = \frac{e^{-2p}}{p+1}$ $donc\ f(t) = e^{-(t-2)}U(t-2)$
3) $F(p) = \frac{3p+1}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{2}{p-1} + \frac{-2p+1}{p^2+1}$ $donc\ f(t) = 2e^t - 2\cos t + \sin t.$

TABLEAU DES TRANSFORMEES DES FONCTIONS USUELLES

f(t) pour t > 0	F(p)
t (rampe)	$\frac{1}{p^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{p^n}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
$1-e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1}{p(1+\tau p)}$
$\frac{t^{n-1}e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau^n(n-1)!}$	$\frac{1}{(1+\tau p)^n}$
$1-\frac{(\tau+t)}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1}{p(1+\tau p)^2}$
$\tau(e^{-\frac{t}{\tau}}+\frac{t}{\tau}-1)$	$\frac{1}{p^2(1+\tau p)}$
$t-2\tau+(t+2\tau)e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1}{p^2(1+\tau p)^2}$
$1+\frac{a-\tau}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1+ap}{p(1+\tau p)}$
$1+(\frac{a-\tau}{\tau^2}t-1)e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1+ap}{p(1+\tau p)^2}$
$(a-\tau)(1-e^{-\frac{t}{\tau}})+t$	$\frac{1+ap}{p^2(1+\tau p)}$
$\frac{1}{\tau_1-\tau_2}(e^{-\frac{t}{\tau 1}}-e^{-\frac{t}{\tau 2}})$	$\frac{1}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$
$1+\frac{1}{\tau_2-\tau_1}(\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau 1}}-\tau_2 e^{-\frac{t}{\tau 2}})$	$\frac{1}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$
$1+\frac{\tau_1-a}{\tau_1-\tau_2}e^{-\frac{t}{\tau 1}}-\frac{\tau_2-a}{\tau_1-\tau_2}e^{-\frac{t}{\tau 2}}$	$\frac{1+ap}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$
$t-\tau_1-\tau_2-\frac{1}{\tau_1-\tau_2}(\tau_2^2 e^{-\frac{t}{\tau 2}}-\tau_1^2 e^{-\frac{t}{\tau 1}})$	$\frac{1}{p^2(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$

f(t) pour t > 0	F(p)
$\delta(t)$ (impulsion)	1
u(t) (échelon)	$\frac{1}{p}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$1-\cos\omega t$	$\frac{1}{p(1+\frac{p^2}{\omega^2})}$
$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}e^{-z\omega_0 t}\sin(\omega_0\sqrt{1-z^2}.t)$	$\frac{1}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}$
	avec $z<1$
$1-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}e^{-z\omega_0 t}\sin(\omega_0\sqrt{1-z^2}.t-\varphi)$	$\frac{1}{p(1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2)}$
avec : $\varphi=\mathrm{Arc}\tan\frac{\sqrt{1-z^2}}{-z}$	avec $z<1$
$t-\frac{2z}{\omega_0}+\frac{1}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}e^{-z\omega_0 t}\sin(\omega_0\sqrt{1-z^2}.t-\varphi)$	$\frac{1}{p^2(1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2)}$
avec : $\varphi=2\mathrm{Arc}\tan\frac{\sqrt{1-z^2}}{-z}$	
$1-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\sqrt{1-2az\omega_0+a^2\omega_0^2}.e^{-z\omega_0 t}$	$\frac{1+ap}{p(1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2)}$
$.\sin(\omega_0\sqrt{1-z^2}.t+\varphi)$ avec :	
$\varphi=\mathrm{Arc}\tan\frac{a\omega_0\sqrt{1-z^2}}{1-az\omega_0}-\mathrm{Arc}\tan\frac{\sqrt{1-z^2}}{-z}$	