Corrigé type TDN°01

TD N° 01

Fonctions usuelles

exo1 :

a/ Calcul de la dérivée première

• $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$$

$$= \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$$

$$= \frac{-1}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

• $g(x) = \dfrac{e^{1/x}+1}{e^{1/x}-1}$

$$g'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot e^{1/x}\left(e^{1/x}-1\right) + \frac{1}{x^2} e^{1/x}\left(e^{1/x}+1\right)}{\left(e^{1/x}-1\right)^2}$$

$$= \frac{2e^{1/x}}{x^2\left(e^{1/x}-1\right)^2}$$

• $h(x) = \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{-2/(x-1)^2}{\frac{(x-1)^2+(x+1)^2}{(x-1)^2}}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{(x-1)^2+(x+1)^2}$$

• $I(x) = [x(x-2)]^{1/3}$

$$I'(x) = \frac{1}{3}(2x-2) \cdot [x(x-2)]^{1/3-1}$$

$$= \frac{2(x-1)}{3[x(x-2)]^{2/3}}$$

• $J(x) = \text{Tan}^3\left(e^{3x}\right)$

$$J'(x) = 3e^{3x} \cdot 3\tan^2\left(e^{3x}\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\left(e^{3x}\right)}$$

$$= \frac{9e^{3x}\sin^2\left(e^{3x}\right)}{\cos^4\left(e^{3x}\right)}$$

• $K(x) = \dfrac{\text{Arcsin}\, x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$K'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2} - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\text{Arcsin}\, x}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2} + x\,\text{Arcsin}\, x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

b/ Dérivée logarithmique

$$[\ln(f)]' = \frac{f'}{f} \Rightarrow f' = f \cdot [\ln(f)]'$$

①. $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}}$

$$[\ln(f(x))]' = \left[\ln x + \ln\sqrt{x+1} - \ln\sqrt[3]{x-1}\right]'$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{x-1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{x-1}\right]$$

② $\sqrt[3]{x}\ \frac{1-x}{1+x}\ \sin^3 x\ \cos^2 x = f(x)$

$[\ln(f(x))]' = [\ln\sqrt[3]{x} + \ln(1-x) - \ln(1+x) + \ln(\sin^3 x) + \ln(\cos^2 x)]'$

$= \frac{1}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} + 3\,\mathrm{cotan}\,x - 2\tan x$

$\longrightarrow f' = f \cdot \ln f$

③ $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$

$[\ln(f(x))]' = [\ln(1+e^x) - \ln(1-e^x)]'$

$= \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{e^x}{1-e^x}$

$= \frac{2e^x}{1-e^{2x}}$

④ $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$[\ln(f(x))]' = \left[x\ \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]'$

$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\ \frac{-1/x^2}{1+\frac{1}{x}}$

$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1/x}{1+1/x}$

$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

Exo2 :

1/ $\begin{cases} e^{x+y} = e^{3x-y} \\ e^{2x-y} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x+y} = e^{3x-y} \\ e^{2x-y} = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y = 3x-y \\ 2x-y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 3x = x \end{cases}$

$\Rightarrow y = x = 0$

Donc $S = \{(0,0)\}$

2/ a. $\log_3(x-4) = 2 \Rightarrow 3^{\log_3(x-4)} = 3^2$

$\Rightarrow x-4 = 9$

$\Rightarrow x = 13$

b. $3^{2x} - 4\cdot 3^x + 3 = 0$ —— ⊛

On pose $X = 3^x$

⊛ $\Leftrightarrow X^2 - 4X + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (X-1)(X-3) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ \text{ou} \\ X = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 1 \\ \text{ou} \\ 3^x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 1 \end{cases}$

$S = \{0, 1\}$

c. $5\cdot 5^{4x+2} - 26\cdot 5^{2x+2} + 125 = 0$

$\Rightarrow 5\cdot \cancel{5^2}\cdot 5^{4x} - 26\cdot \cancel{5^2}\cdot 5^{2x} + \cancel{125} = 0$

$\Rightarrow 5\cdot 5^{4x} - 26\cdot 5^{2x} + 5 = 0$

$X = 5^{2x}$

$\Rightarrow 5X^2 - 26X + 5 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} X = 1/5 \\ \text{ou} \\ X = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^{2x} = 1/5 \\ \text{ou} \\ 5^{2x} = 5 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x = \log_5 \frac{1}{5} = -1 \\ \text{ou} \\ 2x = \log_5 5 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -1/2 \\ \text{ou} \\ x = 1/2 \end{cases}$

$S = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$

Exo3 :

$N(t) = 100\ e^{a\cdot t}$

N(t) : N° de cellules cancéreuses après t jours

1/ Nbre de cellules injectées :

$N_0 = N(0) = 100\, e^{0.1 \cdot 0} = 100$ cellules

2/ Nbre de cellules le 10ème jour :

$N(10) = 100 . e^{0.1 \cdot 10} = 100\, e \simeq 272$ cellules

3/ . Taux de croissance moyen durant les 10 premiers jours

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = \frac{N(10) - N(0)}{10 - 0} = \frac{100\, e - 100}{10} = 10(e-1) \simeq 17 \text{ cellules}/j$$

4/ Taux de croissance le 10ième jour

$N'(t) = 100 \cdot 0.1\, e^{0.1 t} = 10 . e^{0.1 t}$.

$\Rightarrow N'(10) = 10 . e^{0.1 \cdot 10} = 10 . e \approx 27$ cellules/j

5/ . $N(t) = 40000$. $t = ?$.

$N(t) = 40000 \Rightarrow 100\, e^{0.1 t} = 40000$

$\Rightarrow e^{0.1 t} = 400$

$\Rightarrow 0.1 t = \ln 400$

$\Rightarrow t = 10 \ln 400$

$\approx 60\, j$

Exo4 :-

$$M(t) = \frac{24}{2 + e^{-t}}$$

$M(t)$: masse (en g) d'une culture bactérienne après t h.

1/ . Masse initiale :

$M_0 = M(0) = \frac{24}{2 + e^{0}} = 8g$.

2/ $\lim\limits_{t \to +\infty} M(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{24}{2 + e^{-t}} = 12g$

Interprétation : la masse finale peut être rendue proche de 12 g

Graphiquement : La courbe de la masse admet une asymptote horizontale d'équation $y = 12$

3/ $M(t) = 10g \longrightarrow t = ?$

$M(t) = 10 \Longrightarrow \frac{24}{2 + e^{-t}} = 10$

$\Rightarrow 2 + e^{-t} = 2{,}4$.

$\Rightarrow e^{-t} = 0{,}4$.

$\Rightarrow t = -\ln(0{,}4) \approx 1h$

4/ Taux de croissance durant la 1ère h.

$$\frac{\Delta M(t)}{\Delta t} = \frac{M(1) - M(0)}{1 - 0} \simeq 10 - 8 = 2\, g/h$$

5/ Taux de croissance initial

$M'(0) = ?$.

$$M'(t) = \frac{24\, e^{-t}}{(2 + e^{-t})^2}$$

$$M'(0) = \frac{24 . e^{0}}{(2 + e^{0})^2} = \frac{24}{9} \approx 2{,}66\, g/j$$

6/ . $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{dM(t)}{dt} = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{24 . e^{-t}}{(2 + e^{-t})^2} = \frac{0}{4} = \boxed{0}$

Interprétation :

$\lim\limits_{t \to +\infty} M'(t) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{t \to +\infty} M(t) = c^{te}$

ce qui justifie la deuxième question

$\lim\limits_{t \to +\infty} M(t) = 12$

3