Fiche de TD N° 10
Variables aléatoires

Exercice 1

La loi de probabilité d'une v.a. X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-4	-2	1	2	3
$P(X = x_i)$	0.10	0.35	0.15	0.25	0.15

1. Représenter graphiquement la loi de X
2. Donner sa fonction de répartition et en tracer le graphe.
3. Calculer $P(X < 0), P(X > -1), P(-3.5 < X \leq -2)$ et $P(-3.5 < X < -2)$.
4. Donner, sous forme d'un tableau, la loi de probabilité des variables aléatoires suivantes :
$$|X|\,, X^2 + X - 2\,, \inf(X, 1)\,\,, \sup(X, -X^2)$$

Exercice 2

Soit X la v.a. définie par :

$$P(X = 1) = (1 - p)^2,\;\; P(X = 2) = 2p(1 - p),\;\; P(X = 0) = p^2$$

où p est un paramètre réel satisfaisant $0 \leq p \leq 1$.

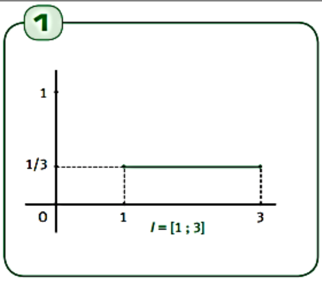
1. Vérifier qu'ainsi on a bien défini une loi de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.
4. On pose $Y = 2X - 3$. Quelles sont l'espérance et la variance de Y.

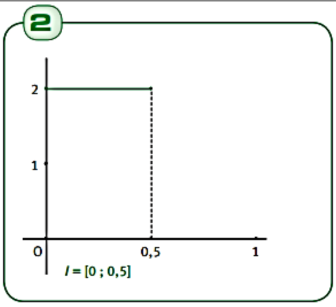
Exercice 3

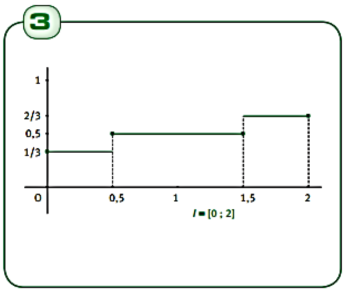
On a placé dans une urne cinq boules indiscernables au toucher : trois noires et deux blanches. On tire au hasard une à une toutes les boules de cette urne, et on appelle R le rang de la première boule blanche tirée. Déterminer la loi de probabilité de R et son espérance.

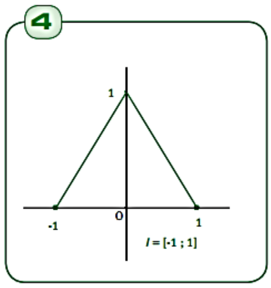
Exercice 4

Pour chacune des fonctions représentées graphiquement ci-dessous, dire s'il s'agit d'une densité de probabilité sur l'intervalle I en justifiant votre réponse.









Exercice 5

Soit X une v.a. ayant pour densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-\frac{x-1}{2}} & si\ \ x > 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Calculer l'unique valeur que l'on peut attribuer à la constante k pour que f soit densité de probabilité de la v.a. X.
2. Déterminer F la fonction de répartition de X.
3. Calculer les probabilités suivantes :
$$P(X > 2)\,;P(1 < X \leq 2)\,;P[(X \leq 1) \cup (X > 2)]\,;P[(X \leq 3)/(X \geq 2)]$$
4. Déterminer la valeur x_0 telle que $P(X \leq x_0) = 50\%$.
5. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de la v.a. X.
6. En déduire l'espérance mathématique $E(Y)$ et la variance $V(Y)$ de la v.a. $Y = \frac{X-1}{2}$.
7. Déterminer G la fonction de répartition de la v.a. $Y = \frac{X-1}{2}$. En déduire g la fonction densité de probabilité de Y.

Exercice 6

Soit X une v.a. suivant une loi de paramètres réels a et α strictement positifs. La fonction de répartition associée F est définie, pour x_0 réel positif donné, par :

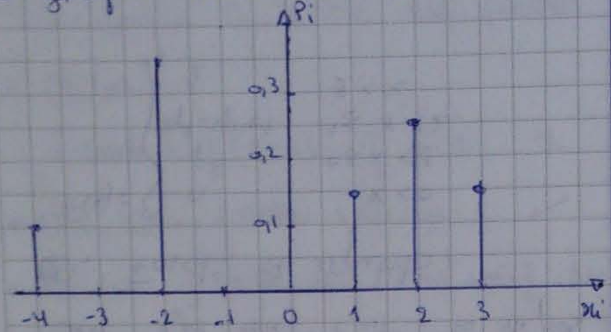
$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{a}{x^{\alpha}} & si\ \ x > x_0 \\ 0 & si\ \ x \leq x_0 \end{cases}$$

1. En utilisant la continuité de F, déterminer a en fonction de x_0 et α.
2. En déduire la fonction densité de probabilité f de X.
3. Une étude expérimentale donne : $P(X \leq 10) = 0.75$ et $P(X \leq 50) = 0.99$. Déterminer les paramètres de la loi de X.
4. Calculer l'espérance de X puis représenter graphiquement f.

Corrigé TD N° 10
Variables aléatoires.

Exo1

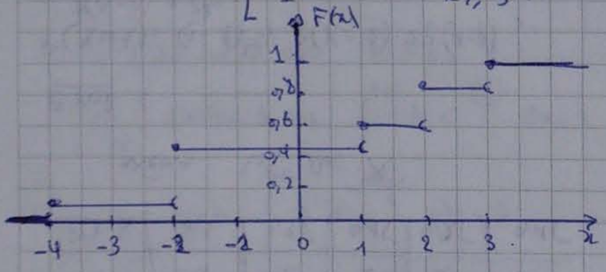
① Graphe de la loi de X.



② Fonction de répartition et son graphe.

x_i	-4	-2	1	2	3	Σ
$P(X=x_i)$	0,1	0,35	0,15	0,25	0,15	1
$F(x_i)$	0,1	0,45	0,6	0,85	1	/

donc :
$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<-4 \\ 0,1 & -4\leq x<-2 \\ 0,45 & -2\leq x<1 \\ 0,6 & 1\leq x<2 \\ 0,85 & 2\leq x<3 \\ 1 & x\geq 3 \end{cases}$$



3/ Calcul des probabilités.

- $P(X<0) = P(X\leq -2) = F(-2) = \boxed{0,45}$.
- $P(X>-1) = 1 - P(X\leq -1) = 1 - F(-1) = 1-0,45 = \boxed{0,55}$
- $P(-3,5<X\leq -2) = F(-2) - F(-3,5) = 0,45 - 0,1 = \boxed{0,35}$.
- $P(-3,5<X<-2) = 0$.

4/ Loi de probabilité :

- Loi de $|X|$.

x_i	-4	-2	1	2	3
$\lvert x_i\rvert$	4	2	1	2	3

Donc $|X|(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$.

$P(|X|=1) = P(X=1) = 0,15$.

$P(|X|=2) = P(X=-2 \cup X=2)$
$= P(X=-2) + P(X=2)$
$= 0,35 + 0,25 = 0,6$.

$P(|X|=3) = P(X=3) = 0,15$.

$P(|X|=4) = P(X=-4) = 0,1$.

Donc : la loi de $Y=|X|$ est donnée par

y_i	1	2	3	4
$P(Y=y_i)$	0,15	0,6	0,15	0,1

- Loi de $Z = X^2+X-2$.

x_i	-4	-2	1	2	3
x_i^2	16	4	1	4	9
z_i	10	0	0	4	10

donc : $Z(\Omega) = \{0, 4, 10\}$.

$P(Z=0) = P(X=-2 \cup X=1)$
$= P(X=-2) + P(X=1)$
$= 0,35 + 0,15 = 0,5$.

$P(Z=4) = P(X=2) = 0,25$.

$P(Z=10) = P(X=-4) + P(X=3)$
$= 0,10 + 0,15 = 0,25$.

donc la loi de $Z = X^2+X-2$ est :

z_i	0	4	10
$P(Z=z_i)$	0,5	0,25	0,25

- Loi de $I = \inf(X, 1)$

$X=x_i$	-4	-2	1	2	3
$I=i$	-4	-2	1	1	1

1

$I(\Omega) = \{-4, -2, 1\}$.

et sa loi de probabilité est:

i	-4	-2	1
$(I=i)$	$0,1$	$0,35$	$0,15+0,25+0,15=0,55$

• Loi de $S = \sup(x; -x^2)$

x_i	-4	-2	1	2	3
$-x_i^2$	-16	-4	-1	-4	-9
S_i	-4	-2	1	2	3
$P(X=S_i)$	$0,1$	$0,35$	$0,15$	$0,25$	$0,15$

même loi de X.

Exo2.

$P(X=1) = (1-p)^2$, $P(X=2)\ 2p(1-p)$, $P(X=0) = p^2$ avec $p \in [0,1]$.

x_i	0	1	2	Σ
$P(X=x_i)$	p^2	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	1
$F(x_i)$	p^2	$2p^2-2p+1$	1	

① Loi de probabilité ?

$$\sum_{i=1}^{3} P_i = p^2 + (1-p)^2 + 2p(1-p)$$
$$= p^2 + 1 - 2p + p^2 + 2p - 2p^2 = \boxed{1}$$

Donc c'est bien c'est la loi de prob.

② Fonction de répartition:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ p^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2p^2 - 2p + 1 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

③ Calcul de $E(X)$ et $V(X)$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i\, P(X = x_i)$$

$$E(X) = 0 \cdot p^2 + 1 \cdot (1-p)^2 + 2\,(2p(1-p))$$

$$\boxed{E(X) = 1 + 2p - 3p^2}$$

• $V(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2\, P(X=x_i) - (E(X))^2$

$$= 0^2 \cdot p^2 + 1^2 \cdot (1-p)^2 + 2^2 \cdot 2p(1-p) - (1+2p-3p^2)^2$$

$$\boxed{V(X) = p\,(2 - 5p + 12p^2 - 9p^3)}$$

④ . $Y = 2X - 3$.

$$E(Y) = 2E(X) - 3 = 2(1+2p-3p^2) - 3$$

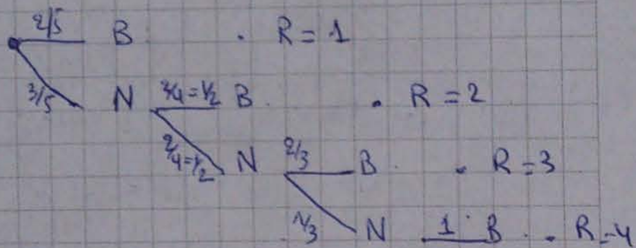
$$\boxed{E(Y) = 4p - 6p^2 - 1}$$

$$V(Y) = 4\,V(X) = \boxed{4p\,(2-5p+12p^2-9p^3)}$$

EX3. 3 N, 2 B.

R: "le rang de la 1ère boule blanche tirée"

Loi de R



$R(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$.

$P(R=1) = 2/5$.

$P(R=2) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = 3/10$.

$P(R=3) = 3/5 \times 1/2 \times 2/3 = 1/5$.

$P(R=4) = 3/5 \times 1/2 \times 1/3 \times 1 = \frac{1}{10}$.

Donc:

r_i	1	2	3	4	Σ
$P(R=r_i)$	$2/5$	$3/10$	$1/5$	$1/10$	1

* $E(X) = \sum_{i=1}^{4} r_i \cdot P(R=r_i) = \frac{20}{10} = \boxed{2}$

2

Exo4.

(f est une densité de prob. sur I) $\Longleftrightarrow \begin{cases} ①\ f \geq 0 \text{ sur } I \\ ②\ \int_I f(x)dx = 1 \end{cases}$

. les fonctions des 4 cas sont positives

* 1er cas :

$\int_I f(x)dx = \frac{1}{3}(3-1) = \frac{2}{3} \neq 1$ ✗

* 2ème cas, $\int_I f(x)dx = 2\times(0,5-0) = 1$ ✓
* 3ème cas, $\int_I f(x)dx = 0,5\times\frac{1}{3} + 1\times 0,5 + 0,5\times\frac{2}{3} = 1$ ✓
* 4ème cas, $\int_I f(x)dx = 1$ ✓

Exo5 ;

$f(x) = \begin{cases} k e^{-\frac{x-1}{2}} & x>1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

① Calcul de k.

(f densité de prob. sur IR) $\Longleftrightarrow$ * $f \geq 0$ sur IR. * $\int_{IR} f(x)dx = 1$.

* $f \geq 0$ sur IR $\Longleftrightarrow k \geq 0$.
* $\int_{IR} f(x)dx = 1 \Longleftrightarrow \int_1^{+\infty} k e^{-\frac{x-1}{2}} dx = 1$.

$\Longleftrightarrow -2k \int_1^{+\infty} -\frac{1}{2} e^{-\frac{x-1}{2}} dx = 1$.

$\Longleftrightarrow -2k \lim_{a\to+\infty} \left[e^{-\frac{x-1}{2}}\right]_1^a = 1$.

$\Longleftrightarrow 2k = 1 \Longleftrightarrow \boxed{k = 1/2 \geq 0}$

② Fonction de répartition :

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

- $x \leq 1$: $F(x) = 0$.
- $x > 1$: $F(x) = -\int_1^x -\frac{1}{2} e^{-\frac{t-1}{2}} dt$

$= -\left[e^{-\frac{t-1}{2}}\right]_1^x = 1 - e^{-\frac{x-1}{2}}$

donc : $\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - e^{-\frac{x-1}{2}} & \text{si } x > 1 \end{cases}}$

3/. Calcul des probabilités :

- $P(X>2) = 1 - F(2) = 1 - (1 - e^{-1/2}) = \boxed{1/\sqrt{e}}$.
- $P(1 \leq X \leq 2) = F(2) - F(1) = 1 - e^{-1/2} - 0$

$= \boxed{1 - \frac{1}{\sqrt{e}}}$.

- $P(X \leq 1 \cup X > 2) = P(X \leq 1) + P(X>2)$

$= F(1) + P(X>2)$

$= \boxed{1/\sqrt{e}}$.

- $P(X \leq 3 / X \geq 2) = \frac{P(2 \leq X \leq 3)}{P(X \geq 2)}$

$= \frac{F(3) - F(2)}{P(X>2)} = \frac{1 - \frac{1}{e} - 1 + \frac{1}{\sqrt{e}}}{1/\sqrt{e}}$

$= \boxed{1 - \frac{1}{\sqrt{e}}}$

④. Déterminons x_0 tq : $P(X \leq x_0) = 0,5$

$\underbrace{P(X \leq x_0)}_{=F(x_0)} = 0,5 > 0 \Rightarrow x_0 > 1$.

$\Rightarrow 1 - e^{-\frac{x_0-1}{2}} = 0,5$

$\Rightarrow e^{-\frac{x_0-1}{2}} = 0,5$

$\Rightarrow -\frac{x_0-1}{2} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$

$\Rightarrow x_0 = 2\ln 2 + 1$.

⑤. Calcul de $E(X)$, $V(X)$:

$E(X) = \int_R x f(x)dx$

$= \int_1^{+\infty} x \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{x-1}{2}}\right) dx$

$\overset{\text{I.P.P}}{=} \lim_{a\to\infty} \left[-x e^{-\frac{x-1}{2}}\right]_1^a + \underbrace{\int_1^{+\infty} e^{-\frac{x-1}{2}} dx}_{=2}$

$= 1 + 2 = \boxed{3}$.

$\boxed{3}$

• $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \underbrace{(-x^2)}_{u} \underbrace{\left(-\frac{1}{2} e^{-\frac{x-1}{2}}\right)}_{v'} dx$

$\overset{I.P.P}{=} \lim_{a \to +\infty} \left[-x^2 e^{-\frac{x-1}{2}}\right]_1^a + \int_1^{+\infty} 2x\, e^{-\frac{x-1}{2}}$

$= 1 + 4 \underbrace{\int_1^{+\infty} x \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{x-1}{2}} dx}_{=3}$

$= \boxed{13}$.

donc : $V(X) = 13 - 9 = 4$.

$\Rightarrow \boxed{\sigma(X) = 2}$

⑥ $Y = \frac{X-1}{2}$

$E(Y) = \frac{E(X)-1}{2} = \boxed{1}$

$V(Y) = \frac{V(X)}{4} = \boxed{1}$.

⑦ Fonction de répartition de Y : "G"

$\forall y \in \mathbb{R}$: $G(y) = P(Y \leq y)$
$= P\left(\frac{X-1}{2} \leq y\right)$
$= P(X \leq 2y+1)$
$= F(2y+1)$

• si $2y+1 \leq 1 \iff y \leq 0$: $G(y) = F(2y+1) = 0$.

• si $2y+1 > 1 \iff y > 0$: $G(y) = F(2y+1) = 1 - e^{-y}$.

Donc : $G(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ 1 - e^{-y} & \text{si } y > 0 \end{cases}$

• Fonction densité de prob. de Y :

$g(y) = G'(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ e^{-y} & \text{si } y > 0 \end{cases}$

Exo 6 $F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a}{x^\alpha} & \text{si } x \geq x_0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

① a en fonction de x_0 et α :

F continue en $x_0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} F(x) = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} 1 - \frac{a}{x^\alpha} = 0$

$\Rightarrow 1 - \frac{a}{x_0^\alpha} = 0 \Rightarrow \boxed{a = x_0^\alpha}$.

② La densité de prob.

$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \alpha \frac{x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \geq x_0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

③ Paramètres de la loi de X :

$\begin{cases} P(X \leq 10) = 0{,}75 \\ P(X \leq 50) = 0{,}99 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(10) = 0{,}75 \\ F(50) = 0{,}99 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 1 - \frac{x_0^\alpha}{10^\alpha} = 0{,}75 \\ 1 - \frac{x_0^\alpha}{50^\alpha} = 0{,}99 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x_0^\alpha}{10^\alpha} = 0{,}25 \\ \frac{x_0^\alpha}{50^\alpha} = 0{,}01 \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\frac{50}{10}\right)^\alpha = 25$

$\Rightarrow 5^\alpha = 25$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = 2}$

$\frac{x_0^2}{10^2} = 0{,}25 \Rightarrow x_0^2 = 25 \Rightarrow \boxed{x_0 = 5}$

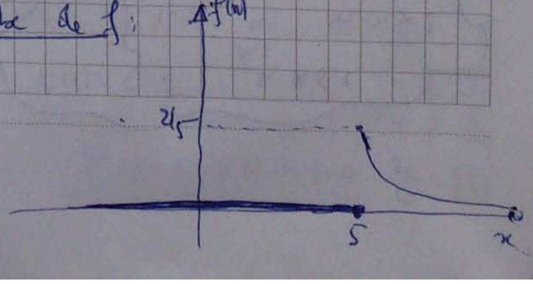
donc les paramètres sont : $\boxed{\begin{array}{l} a = x_0^\alpha = 5^2 = 25 \\ \alpha = 2 \end{array}}$

④ $E(X) =$; $f(x) = \begin{cases} \frac{50}{x^3} & x > 5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$E(X) = \int_5^{+\infty} x \cdot \frac{50}{x^3} dx$

$= \int_5^{+\infty} \frac{50}{x^2} dx = \left[-\frac{50}{x}\right]_5^{+\infty} = \frac{50}{5} = \boxed{10}$.

, Courbe de f :



[4]