

Fiche de TD N° 08
Analyse combinatoire

Exercice 1

Une certaine maladie, qui se manifeste par l'apparition de 6 symptômes différents, ne peut être décelée avec certitude que si le malade présente au moins 4 de ces symptômes.

1. Combien de cas possibles donnent lieu à un diagnostic positif ?
2. Cinq drogues ont été administrées dans le but d'apporter un traitement à cette maladie. Une expérience est effectuée, par un médecin, pour tester l'hypothèse que l'ordre d'administration de ces drogues est important.
 - Combien y a-t-il de façons différentes d'administrer ces 5 drogues?
 - Si deux drogues parmi les cinq nécessitent un intervalle de temps au moins 12 heures entre eux.

Exercice 2

Dans le langage informatique, un symbole est représenté à l'aide d'une suite ordonnée constituée de "0" et/ou de "1". Par exemple la lettre A correspond pour certains types d'ordinateurs à la suite ordonnée : 00100001.

Combien de symboles différents peut-on former avec une suite constituée de 8 chiffres.

1. au total ?
2. contenant cinq « 0 » et trois « 1 »?
3. contenant au moins deux « 1 »?

Exercice 3

Un médecin s'apprête à visiter à domicile 15 de ces malades. De combien de façons peut-il leur rendre visite :

1. s'il les programme tous, le même jour ?
2. s'il programme sept un jour et huit le lendemain ?

Exercice 4

Dans un concours de résidanat, le nombre de candidats retenus est égal à 15. On sait que ces 15 admis sont répartis sur trois spécialités : 6 en Chimie analytique, 5 en Microbiologie et 4 en Pharmacognosie.

1. De combien de façons peut-on répartir les 15 admis sur les trois spécialités en respectant ces quotas ?
2. On connaît les noms des 2 admis affectés en Chimie analytique et ceux de 3 affectés en Microbiologie. De combien de façons peut-on terminer la répartition des autres admis sur les trois spécialités toujours selon les quotas préfixés ?



Exercice 5

Un biologiste veut classer 46200 espèces d'insectes en attribuant à chaque espèce un sigle composé de n lettres de l'alphabet (non nécessairement distinctes) dans un certain ordre.

1. Combien de lettres aurait-il dû attribuer à chaque espèce pour qu'il achever sa classification ?
2. Combien de sigles peut-on former par cette classification :
 - au total ?
 - avec des lettres distinctes ?
 - comportant une consonne et dans la première position ?
 - comportant une consonne ?
 - commençant par une consonne puis des voyelles distinctes ?
 - comportant une consonne et des voyelles distinctes ?

Exercice 6

Dans un groupe de 32 étudiants : 7 garçons et 25 filles. On doit élire trois délégués. Quel est le nombre de choix possibles :

1. Au total ?
2. Si l'on impose que des garçons ?
3. Si les deux sexes doivent être présents dans la délégation ?
4. Si l'on impose au moins une fille ?
5. Répondre aux questions précédentes si l'on veut élire un délégué, un premier suppliant et un deuxième suppliant

Exercice 7

Dix malades, dont deux hommes et huit femmes, entrent dans une salle d'attente où 5 sièges sont libres.

1. De combien de façons ces sièges peuvent-ils être tous occupés?
2. De combien de façons peuvent-ils être occupés si les 2 hommes sont des personnes âgées qui ne peuvent rester debout?
3. Même question si les deux hommes ne doivent jamais être voisins ?

Exercice 8

Considérons un examen de type QCM, avec 20 questions et 4 réponses possibles par question dont une seule est juste.

1. Calculer le nombre total de formulaires complets différents possibles.
2. Si le candidat ne doit répondre qu'à 75% des questions exactement, de combien de choix de questions dispose-t-il?
Même question, mais lorsque le candidat ne peut choisir la première mais doit prendre la dernière.
3. Supposons que les questions sont réparties en 4 sections de 7, 4, 6 et 3 questions. Combien de possibilités de répartition a-t-on ?
Si le candidat doit répondre à 3 questions par section, combien a-t-il de choix différents possibles?



Corrigé TD N° 08.
Analyse combinatoire

Exo 1

Maladie \rightarrow 6 symptômes

Diagnostic positif \leftrightarrow 4 symptômes

① Nbre de cas possibles donnant lieu à un diagnostic positif:

Chaque cas est un combinaison de 4 symptômes parmi les 6:

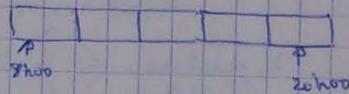
$$C_6^4 = 15$$

② Traitement: 5 drogues (l'autre est portante)

\Rightarrow Nbre de façons différentes d'administrer ces 5 drogues est

$$P_5 = 5! = 120$$

• Deux drogues nécessitent un intervalle de 12h entre eux par exemple: la 1^{ère} à 8h00 et l'autre à 20h00, les autres entre 8h00 et 20h00



donc: il ya 2! choix possibles pour les deux drogues espacées et 3! choix possibles pour les 3 drogues restantes.

$$\Rightarrow \text{au total: } 2! \times 3! = 12$$

Exo 2. Langage informatique

Chaque symbole est représenté par un octet = suite ordonnée de 8 bits (0 ou 1).
exemple: $A = 0101010101$

\Rightarrow chaque symbole est un arrangement avec répétition de 8 chiffres pris parmi les deux chiffres du système binaire

① Nombre total: $A_2^8 = 2^8 = 256$

② Contenant 5(0) et 3(1):

$$\frac{P_8(5,3)}{P_8(5,3)} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$$

③ Contenant au moins 2(1) \leftrightarrow C-à-D. 2(1) ou 3(1) ou 4(1) ou 5(1)

sur à -1: au plus 1(1) \leftarrow complément

Soit 0(1) ou 1(1)

donc le nbre de symboles est:

$$256 - \left(\underset{0(1)}{1} + \underset{1(1)}{\frac{8!}{7!}} \right) = 248$$

Exo 3

Médecin rendra visite à 15 malades

① s'il les programme tous à un jour:

$$P_{15} = 15!$$

② s'il groupe 7 un jour et 8 le lendemain:

$$A_{15}^7 \times \frac{P_8}{8} = \frac{15!}{8!} \times 8! = 15!$$

Exo 4

15 admis: 6 Ch.; 5 M et 4 Ph.

① Nbre de façons de répartir les 15 admis sur les 3 spécialités:

\rightarrow Il ya C_{15}^6 choix possibles pour les résidents en Ch; donc il reste 9 admis.

\rightarrow il ya C_9^5 choix pour les résidents en M

et les 4 restant sont automatiquement affectés en Ph.

donc au total: $\frac{C_{15}^6}{11} \times C_9^5 \times C_4^4 = 62630$

② 2 admis en Ch + 3 en M sont connus

Nbre de façons pour compléter la répartition

$$C_{10}^4 \times C_6^2 \times C_4^4 = 3150$$

Exo 5

46200 espèces d'insectes

sigle: suite ordonnée de n lettres.

= arrangement avec répétition de n lettres prises parmi les 26 de l'alphabet.

① Nombre de lettres : $n = ?$
 $A_{26}^n = 26^n \geq 46200 \Rightarrow n \geq \log_{26} 46200$
 $\Rightarrow n \geq 3,29$

Donc : $n = 4$ lettres

② Nombre de sigles :

→ au total : $A_{26}^4 = 26^4 = 456976$

→ Lettres distinctes : $A_{26}^4 = 26 \times 25 \times 24 \times 23 = 358800$

→ Comportant une seule Consonne à la 1^{ère} position :

$20 \times 6^3 = 4320$

→ Comportant une seule Consonne :

$20 \times 6^3 \times \frac{4!}{3!} = 17280$

N^{bre} de cas pour permuter les 4 lettres

→ Commencant par une Consonne puis des voyelles distinctes :

$20 \times A_6^3 = 20 \times 6 \times 5 \times 4 = 2400$

→ Comportant une seule Consonne et des voyelles distinctes :

$20 \times A_6^3 \times \frac{4!}{3!} = 2400 \times 4 = 9600$

Exob :

32 étudiants : 7 G + 25 F

Élire 3 délégués = groupe composé de 3 étudiants = combinaison

N^{bre} de choix possibles :

①. au total : $C_{32}^3 = 4960$

②. $C_7^3 = 35$

③. $C_7^1 \times C_{25}^2 + C_7^2 \times C_{25}^1 = 2625$
 1G et 2F 2G et 1F

④. (1F et 2G) ou (2F et 1G) ou (3F)

= aucune fille = $4960 - 35 = 4925$
 = $2625 + C_{25}^3$

⑤. Élire un délégué, 1^{er} suppléant et 2^{ème} suppléant

⇒ l'ordre est important = arrangement sans répétition

→ au total : $A_{32}^3 = 3! \times C_{32}^3 = 29760$

→ $A_{32}^3 = 3! \times 35 = 210$

→ $2625 \times 3! = 15750$

→ $4925 \times 3! = 29550$

Exo 73 : 10 malades = 2H et 8F. 5 sièges sont libres

① $A_{10}^5 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$

②. $A_{10}^2 \times A_8^3 = 6720$

N^{bre} de choix pour placer les 2 H

N^{bre} de choix pour placer 3 femmes

ou bien :

$C_2^3 \times 5! = 6720$

N^{bre} de choix de 3F parmi les 8

N^{bre} de choix pour les places avec les 2H

③. $6720 - C_2^3 \times 4! = 5376$

N^{bre} de choix pour que les 2H soient voisins

Exo 8 : 20 questions (QCS) : a. 4 réponses, b. 3 réponses, c. 2 réponses, d. 1 réponse

① N^{bre} de Formulaires

Un formulaire = est obtenu de 20 réponses choisies parmi les 4 propositions a, b, c, ou d
 $\Rightarrow N_{\text{bre}}^{\text{de}} F = A_{20}^4 = 420$

②. $75 \times 20 = 15$ questions

N^{bre} de choix de questions = N^{bre} de combinaison de 15 parmi les 20 des QCS donc : $C_{20}^{15} = 15504$

Il doit prendre la dernière question mais pas la 1^{ère} : il reste 14 que choisies parmi les 18

= $C_{18}^{14} = 3060$

③. 4 sections : $S_1 = 7Q, S_2 = 4Q, S_3 = 6Q, S_4 = 3Q$

N^{bre} de possibilités de répartitions :

$C_{20}^7 \times C_{13}^4 \times C_9^6 \times C_3^3 =$

• Répondre à 3Q par section 3

$C_7^3 \times C_9^3 \times C_6^3 \times C_3^3 = 2800$