Fiche de TD N° 09
Théorie des probabilités

Exercice 1

Un laboratoire pharmaceutique fabrique un médicament sous forme de comprimés dans lesquels on trouve deux substances actives S_1 et S_2. Le laboratoire décide d'effectuer un contrôle sur un échantillon de 400 comprimés. Voici les résultats obtenus :

- 380 comprimés ont la bonne concentration en substance S_1 ;
- 360 comprimés ont la bonne concentration en substance S_2;
- Parmi ces derniers, 342 ont la bonne concentration en substance S_1.

1. Compléter le tableau suivant pour récapituler les résultats précédents

	Bonne concentration en substance S_2	Erreur de concentration en substance S_2	Total
Bonne concentration en substance S_1			
Erreur de concentration en substance S_1			
Total			Total

2. On prélève au hasard un comprimé parmi les 400 comprimés de l'échantillon et on considère les deux événements suivants :
   Événement A : " la concentration en substance S_1 du comprimé n'est pas bonne " ;
   Événement B : "la concentration en substance S_2 du comprimé n'est pas bonne ".
   a. Écrire les événements suivants à l'aide de A, B et des opérations ensemblistes usuelles :
      E_1 : " les concentrations en substances S_1 et S_2 du comprimé ne sont pas bonnes ";
      E_2 : " la concentration en substance S_1 du comprimé est bonne ";
      E_3 : " la concentration en substance S_2 du comprimé est bonne mais ne l'est pas pour la substance S_1 ";
      E_4 : " la concentration en substance S_1 du comprimé est bonne mais ne l'est pas pour la substance S_2".
   b. Traduire par une phrase les événements suivants :
      $E_5 = A \cup B$; $E_6 = \bar{A} \cap \bar{B}$; $E_7 = \bar{A} \cup \bar{B}$; $E_8 = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$.
3. Calculer la probabilité des évènements A, B et $E_i, i = \overline{1;8}$.

Exercice 2

Soient deux évènements A et B tels que : $P(A \cap B) = 0{,}1$; $P(A \cup \bar{B}) = 0{,}6$ et $P(\bar{A}|\bar{B}) = 0{,}8$.

1. Quelles sont les valeurs de : $P(B), P(\bar{A} \cap \bar{B})$ et $P(A)$
2. Les événements A et B sont-ils incompatibles ? indépendants ?

Exercice 3

Dans un lot de 80 vaccins, 10 sont périmés. Si on en tire deux vaccins au hasard, quelle est la probabilité d'obtenir :

1. aucun vaccin périmé ?
2. un vaccin périmé ?
3. deux vaccins périmés ?

Exercice 4

Le sang d'un être humain appartient à un des 4 groupes sanguins : A, B, AB et O. De plus il possède ou non l'antigène Rhésus. Le sang d'une personne du groupe A porteur de l'antigène sera noté A^+. La répartition des groupes sanguins dans une population est comme suit :

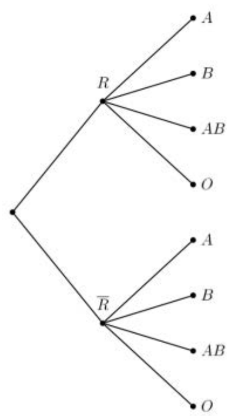
A	B	AB	O
44%	8%	3%	45%

Pour chaque groupe, on connaît aussi la proportion d'individus possédant l'antigène Rhésus :

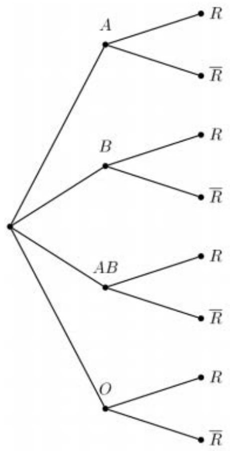
A	B	AB	O
85%	81%	87%	84%

On note R : « l'individu est porteur de l'antigène Rhésus ». Une personne est prise au hasard.

1. Lequel de ces deux arbres pourra-t-on compléter avec les données sans faire de calcul ?
2. Sur lequel pourra-t-on lire $P(R)$? $P(A)$? $P(R|A)$? $P(A|R)$?



Arbre 1



Arbre 2

Exercice 5

Dans un cours de statistique, l'enseignant présente trois thèmes A, B et C. Pour évaluer un étudiant, l'enseignant choisit au hasard un (et un seul) thème selon les probabilités suivantes : $P(A) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}2$. L'enseignant observe que les prestations des étudiants dépendent du thème. Il range ces prestations en trois catégories : E pour un échec total, R pour une interrogation à revoir pour confirmer la compréhension du sujet et S pour un succès.

L'enseignant constate les performances suivantes :

Thème A : 25 % des étudiants obtiennent un succès S, 30 % sont à revoir R, le reste en échec ;

Thème B : 40 % des étudiants sont en échec, 40 % en succès, le reste étant à revoir ;

Thème C : On atteint ici 50 % d'échec, 30 % à revoir, le reste en succès.

1. Calculer la probabilité qu'un étudiant soit en échec dans cette procédure d'évaluation.
2. Sachant que l'étudiant est à revoir, calculer la probabilité qu'il ait été interrogé sur le Thème C.
3. Calculer la probabilité qu'un étudiant ne soit pas en échec, sachant qu'il ne sera pas interrogé sur le Thème A.
4. Les évènements "être interrogé sur le Thème B" et "obtenir un échec E" sont-ils indépendants ? Justifiez votre réponse.

Corrigé TD N°: 09.

Théorie des Probabilités.

Exo 1.

$\boxed{1}$ Récapitulation des données.

	Bonne en S_2	Erreur en S_2	Total
Bonne en S_1	342	$\boxed{38}$	380
Erreur en S_1	$\boxed{18}$	$\boxed{2}$	$\boxed{20}$
Total	360	$\boxed{40}$	400

$\boxed{2}$. Prélèvement d'un comprimé parmi les 400

A : " La concentration en S_1 n'est pas bonne "

B : " " " S_2 " " " "

a/. Expression de E_i en fonction de A et B.

$E_1 = A \cap B$

$E_2 = A$

$E_3 = A \cap \bar{B}$

$E_4 = \bar{A} \cap B$.

b/. Traduction par une phrase.

- $E_5 = A \cup B$ = " au moins une des concentration en substance S_1 ou S_2 n'est pas bonne ".
- $E_6 = \bar{A} \cap \bar{B}$ = " les deux concentration en S_1 et S_2 sont bonnes.
- $E_7 = \bar{A} \cup \bar{B}$ = " au moins une des consentrations S_1 ou S_2 est bonne.
- $E_8 = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$ = " seulement une seule concentration est bonne.

$\boxed{3}$. Calcul des probabilités :

Prélèvement au hasard $\Leftrightarrow$ équiprobabilité.

Donc :

- $P(A) = \frac{20}{400} = \frac{1}{20} = \boxed{0,05}$
- $P(B) = \frac{40}{400} = \frac{1}{10} = \boxed{0,1}$
- $P(E_1) = P(A \cap B) = \frac{2}{400} = \boxed{0,005}$
- $P(E_2) = P(\bar{A}) = \frac{380}{400} = \boxed{0,95}$

aussi $= 1 - P(A)$.

- $P(E_3) = P(A \cap \bar{B}) = \frac{18}{400} = \boxed{0,045}$.
- $P(E_4) = P(\bar{A} \cap B) = \frac{38}{40} = \boxed{0,095}$.
- $P(E_5) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0,05 + 0,1 - 0,005 = \boxed{0,145}$.
- $P(E_6) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{342}{400} = \boxed{0,855} = P(\bar{E_5})$.
- $P(E_7) = P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = P(\bar{E_1})$
$= 1 - P(E_1) = 1 - 0,005 = \boxed{0,995}$
- $P(E_8) = P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)]$
$= P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$ [les deux événements $A \cap \bar{B}$ et $\bar{A} \cap B$ sont incompatibles]
$= 0,045 + 0,095 = \boxed{0,14}$.

Exo 2

Soient A et B deux évenements tq : $P(A \cap B) = 0,1$, $P(A \cup \bar{B}) = 0,6$, $P(\bar{A}|_{\bar{B}}) = 0,8$.

$\boxed{1}$ Calcul des probabilités :

- $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$ (d'après la formule des prob. Totales).

$P(B) = P(A \cap B) + 1 - P(\overline{\bar{A} \cap B})$
$= P(A \cap B) + 1 - P(A \cup \bar{B})$
$= 0,1 + 1 - 0,6 = \boxed{0,5}$.

- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}|_{\bar{B}}) \cdot P(\bar{B})$ (Formule des prob. composées)
$= P(\bar{A}|_{\bar{B}}) \times [1 - P(B)]$
$= 0,8 (1 - 0,5) = \boxed{0,4}$.

- $P(A) = ?$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B)$
$= 1 - P(\overline{A \cup B}) + P(A \cap B) - P(B)$
$= 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) + P(A \cap B) - P(B)$
$= 1 - 0,4 + 0,1 - 0,5 = \boxed{0,2}$

$\boxed{2}$. A et B sont compatibles ($P(A \cap B) = 0,1 \neq 0$ $\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$)

- $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,5$. $P(A \cap B) = 0,1$.
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\Rightarrow$ A et B sont indépendants.

GIPTA

1

Exo3 :

80 vaccins, 10 sont périmés

tirage de deux vaccins au hasard

(Espace probabilité)

Soit les événements :

A_i : " Obtenir i vaccins périmés parmi les deux tirés "

avec $i = 0, 1, 2$

Donc $P(A_0) = \frac{C_{70}^2}{C_{80}^2} = 0{,}76$

$P(A_1) = \frac{C_{70}^1 \times C_{10}^1}{C_{80}^2} = 0{,}22$

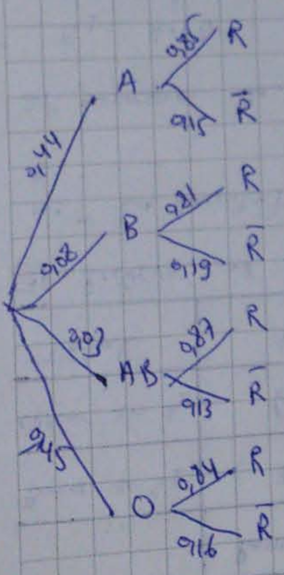
$P(A_2) = \frac{C_{10}^2}{C_{80}^2} = 0{,}01$

Exo4 :

$P(A) = 0{,}44$, $P(B) = 0{,}08$, $P(AB) = 0{,}03$, $P(O) = 0{,}45$

$P(R|_A) = 0{,}85$, $P(R|_B) = 0{,}81$, $P(R|_{AB}) = 0{,}87$, $P(R|_O) = 0{,}84$

① C'est l'arbre 2 qui résume ces données.



② Lecture des probabilités :

Prob.	$P(R)$	$P(A)$	$P(R\|A)$	$P(A\|R)$
Arbre	1	2	2	1

Exo5 : A : " être interrogé sur le thème A "
B : " ... B "
C : " ... C "

$P(A) = 0{,}3$ $P(B) = 0{,}2$ $\Longrightarrow P(C) = 0{,}5$

E : " être en échec "
R : " ... à revoir "
S : " ... en succès "

- $P(S|_A) = 0{,}25$, $P(R|_A) = 0{,}3$; $P(E|_A) = 0{,}45$.
- $P(E|_B) = 0{,}4$. $P(S|_B) = 0{,}4$, $P(R|_B) = 0{,}2$.
- $P(E|_C) = 0{,}5$, $P(R|_C) = 0{,}3$. $P(S|_C) = 0{,}2$

① $P(E) = P(A).P(E|A) + P(B).P(E|B) + P(C).P(E|_C)$
$= 0{,}3 . 0{,}45 + 0{,}2 . 0{,}4 + 0{,}5 . 0{,}5$
$= \boxed{0{,}465}$.

② $P(C|_R) = \frac{P(C)\ P(R|C)}{P(A).P(R|A) + P(B).P(R|B) + P(C).P(R|C)}$

$= \frac{0{,}5 . 0{,}3}{0{,}3 . 0{,}3 + 0{,}2 . 0{,}2 + 0{,}5 . 0{,}3}$

$= \boxed{0{,}531}$

③ $P(\bar{E} | \bar{A}) = \frac{P(\bar{E} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})}$

$= \frac{P(\bar{E} \cap B) + P(\bar{E} \cap C)}{1 - P(A)}$

$= \frac{P(B).P(\bar{E}|B) + P(C).P(\bar{E}|C)}{1 - P(A)}$

$= \frac{0{,}2\,(1 - 0{,}4) + 0{,}5\,(1 - 0{,}5)}{1 - 0{,}3}$

$= \boxed{0{,}521}$.

④ Indépendance de E et B.

$P(E|B) = 0{,}4 \neq 0{,}465 = P(E)$

$\Rightarrow$ E et B sont dépendants.

2