Transformation de Cayley

Déf:

Soit A un op. lin. symétrique, On appelle transformation de Cayley de A, la transformation:

$$A \hookrightarrow V = (A-i)(A+i)^{-1} .$$

Proposition:

Soit A un op. symétrique, V sa transformation de Cayley, alors V est une isométrie définie sur $R(A+i)$ dans $R(A-i)$,

$$A = i(I+V)(I-V)^{-1}$$

Preuve :

Soit $y = (A+i)x \in R(A+i)$, $x \in \mathcal{D}(A)$. On a

$$\|Vy\|^2 = \|(A-i)(A+i)^{-1}y\|^2 = \|(A-i)x\|^2$$
$$= \|x\|^2 + \|Ax\|^2 \quad (A \text{ est symétrique})$$
$$= \|(A+i)x\|^2$$
$$= \|y\|^2$$

Donc $V : R(A+i) \longrightarrow R(A-i)$ est une isométrie.

On a

$$I+V = I + (A-i)(A+i)^{-1}$$
$$= [(A+i)+(A-i)](A+i)^{-1}$$
$$= 2A(A+i)^{-1}.$$

$$I - V = I - (A-i)(A+i)^{-1}$$
$$= [(A+i) - (A-i)](A+i)^{-1}$$
$$= 2i(A+i)^{-1}$$

Donc $I - V$ st inversible ;

$R(I-V) = R(A+i)^{-1} = D(A)$

$R(I-V)$ st dense si A st densement défini.

Et on a :

$$i(I+V)(I-V)^{-1} = i\,.2A(A+i)^{-1}\left[2i(A+i)^{-1}\right]^{-1} = A.$$

Le cas où A st fermé, mérite une attention particulière,

On a :

Proposition :

Soient A un op. symétrique, V sa transformée de Cayley, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1) A est fermé.
2) V est fermé.
3) $\mathcal{D}(V) = R(A+i)$ est fermé
4) $R(V) = R(A-i)$ est fermé.

Preuve

Exercice.

Proposition :

Soit A un op. symétrique, alors A est auto-adjoint ssi V est unitaire.

Preuve :

On rappelle que A est auto-adjoint ssi $d_+(A) = d_-(A) = 0$

ce qui se traduit par :

$R(A+i) = R(A-i) = H$

i.e $\mathcal{D}(V) = R(V) = H$

i.e V est unitaire.

Extension d'opérateur symétrique
(Extension de Von Neumann)

Pour un opérateur symétrique A; on cherche une extension auto-adjointe, si A_e est une telle extension, on doit avoir

$A \subset A_e = A_e^* \subset A^*$.

Pour d'éventuelles extensions de A symétrique, on remarque que: une large extension est donnée par V à domaine large i.e: si A, A_1 symétriques, de transformée V et V_1 resp., alors $A \subset A_1 \Leftrightarrow V \subset V_1$; donc la plus large extension est donnée quand V est unitaire.

Lemme : (Extension d'isométrie)

Soit U_0 une isométrie partielle, d'espace initial M, d'espace final $R(U_0)$, tous deux fermés, alors U_0 possède une extension unitaire U ssi $\dim M^\perp = \dim R(U_0)^\perp$

ie ssi $\dim M^\perp = d(U_0)$.

Preuve :

Supposons $\dim M^\perp = \dim R(U_0)^\perp$,

Prenons $U_1 : M^\perp \longrightarrow R(U_0)^\perp$ unitaire, l'existence de U_1 est assurée par la condition $\dim^\perp = \dim R(U_0)^\perp$, soit

$U : H = M \oplus M^\perp \longrightarrow R(U_0) \oplus R(U_0)^\perp$

$U = U_0 \oplus U_1$, alors U est unitaire.

Réciproquement, si U est unitaire et extension de U_0, alors $U(M^\perp) = (UM)^\perp = (U_0 M)^\perp = R(U_0)^\perp$, donc $\dim M^\perp = \dim R(U_0)^\perp$,

<u>Théorème</u> (Extension de Von Neumann)
Soit A un op. symétrique et fermé alors A possède une extension auto-adjointe ssi $d_+(A) = d_-(A)$.

<u>Preuve</u> :
On suppose que A possède une extension auto-adjointe A_e, soit V est la transformation de Cayley de A ; U la transf. de Cayley de A_e. U est une extension unitaire de V, et d'après le lemme précédent, on a :

$$\dim \mathcal{D}(V)^{\perp} = \dim R(A+i)^{\perp} = \dim R(V)^{\perp}$$
$$= \dim R(A-i)^{\perp}$$
$$\text{i.e. } d_+(A) = d_-(A).$$

Réciproque :

Supposons $d_+(A) = d_-(A)$
on $d_+(V) = d_-(V)$, alors
d'après le Lemme, V admet
une extension unitaire U et
$A_e = i(I+U)(I-U)^{-1}$ est
une extension auto-adjointe
de A.