Décomposition de matrices

On a montré dans le chapitre précédant qu'une matrice A de type $m \times n$ est représentable sous la forme : $A = PBQ$, où P et Q sont inversibles, que $rg(A) = rg(B)$ et enfin B est plus simple et maniable, généralement : $B = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si $rg(A) = r$.

Dans ce qui suivera, on va considérer certains cas particuliers :

Décomposition de schur :

Théorème:

Soit A une matrice d'ordre m, $\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres.

Alors $\exists U$ unitaire tels que : $U^* A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & * & \\ & 0 & & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

i.e.A est représentable par une matrice triangulaire supérieure.

Preuve :

Soit x_1 un vecteur unitaire associé à la valeur propre λ_1, i.e. $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ avec $||x_1|| = 1$.

On complète $\{x_1\}$ pour obtenir une base orthonormée $S = (x_1, y_2, ..., y_n)$.

S est une matrice unitaire d'ordre n, on a :

$AS = (Ax_1, Ay_2, ..., Ay_n)$

$=(\lambda_1 x_1, Ay_2, ..., Ay_n)$

$=S(\lambda_1 S^{-1} x_1, S^{-1} Ay_2, ..., S^{-1} Ay_n)$

Du fait que $S^{-1} S = I_n$, alors $S^{-1} x_1 = (\lambda_1, 0, ..., 0)^t$

Et comme $S^{-1} = S^*$ (S unitaire), on a

$$S^* A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \\ . & B \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Où B est carrée d'ordre $n - 1$.

Le même procédé appliqué à B, conduit à l'existence d'une matrice S_1 d'ordre $n - 1$ tq $S_1^* B S_1$ soit triangulaire supérieure.

La matrice $U = S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \\ 0 & S_1 \end{pmatrix}$ est unitaire (vérifier !)

Et $U^*AU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \\ 0 & S_1^* \end{pmatrix} S^*AS \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \\ 0 & S_1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \\ 0 & & \\ . & & \\ 0 & & S_1^*BS_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * & \\ 0 & \lambda_2 & & \\ . & & . & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ce procédé s'appelle a décomposition de Schur.

Corollaire :

Si $A = A^*$, alors A est diagonalisable.

Preuve :

Selon Schur, $\exists U$ unitaire tq :

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * & \\ 0 & \lambda_2 & & \\ . & & . & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Alors $(U^*AU)^* = U^*AU = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & & \\ 0 & \overline{\lambda_2} & & \\ * & & . & \\ 0 & & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$

Donc, par comparaison, on obtient:

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \\ . & & . & . \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On vient de montrer que si $A = A^*$, alors les valeurs propres de A sont réelles.

Corollaire :

Si A est normale, alors A est diagonalisable.

Preuve :

D'après Schur, $\exists U$ unitaire, B triangulaire supérieure tq : $U^*AU = B$. ou bien $A = UBU^*$, d'où $A^* = UB^*U^*$ et $AA^* = UBB^*U^*$, d'autre part $A^*A = UB^*BU^*$, donc A normale <=> B normale, donc

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_{12} & . & . \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \\ . & & . & . \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & & 0 \\ \overline{\lambda_{12}} & \overline{\lambda_2} & 0 & \\ . & & . & . \\ 0 & & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & & \\ & \overline{\lambda_2} & & \\ * & & . & \\ & & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ 0 & \lambda_2 & & \\ . & & & . \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ce qui donne :
$|\lambda_1|^2 + |\lambda_{12}|^2 + ... + |\lambda_{1n}|^2 = |\lambda_1|^2$ ce qui donne $\lambda_{1j} = 0$, $j = 2, 3, ..n$
et $|\lambda_2|^2 + |\lambda_{23}|^2 + ... + |\lambda_{2n}|^2 = |\lambda_{12}|^2 + |\lambda_2|^2$.
D'où $\lambda_{2j} = 0$, $j = 3, ..n$.
En continuant, en conclut que $\lambda_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.
Comme toute matrice diagonale est normale ; on peut citer les conclusions suivantes :

Théorème (décomposition spectrale):

Soit A une matrice carrée d'ordre n, ayant les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Alors A est normale si et seulement si $\exists$ U unitaire telle que $U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * & \\ 0 & \lambda_2 & & \\ . & & . & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Décomposition à rang complet

Définition : une matrice A de type $m \times n$ est dite de rang complet si $rg(A) = m$ ou $rg(A) = n$.

Soit A une matrice de rang $r \geq 1$; on dit que A admet une décomposition (factorisation) à rang complet, s'il existe F, G de même rang r telle que $A = FG$.

Théorème :

soit A une matrice de type $m \times n$ et de rang $r \geq 1$, alors $\exists F$ de type $m \times r$; G de type $r \times n$, $rg(F) = rg(G) = r$ et $A = FG$.

Preuve :

Comme $rg(A) = r$, alors A est équivalente à une matrice de la forme : $B = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Autrement dit $\exists P_m$,Q_m inversibles tq : $A = P_m \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_m$

Décomposons $P_m = \begin{pmatrix} \underset{r}{F} & \underset{m-r}{P'} \end{pmatrix}$, et $Q_m = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} G \\ \\ Q' \end{pmatrix} & \begin{array}{l} r \\ \\ n-r \end{array} \end{array}$

Il est clair que F et G possèdent les propriétés du théorème ; c'est à dire F est de type $m \times r$ et de rang r ; G de type $r \times n$ et de rang r , avec
$A = \begin{pmatrix} F & P' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \\ \\ Q' \end{pmatrix} = (F \quad 0) \begin{pmatrix} G \\ \\ Q' \end{pmatrix} = FG.$

Corollaire :

Si A est de rang complet ; alors l'une des matrices $A^t A$ ou AA^t est inversible.

Preuve :

Supposons $rg(A) = n$, donc A est inversible à gauche, donc $rg\left(A^t A\right) = rg(A) = n$.
$A^t A$ est carrée d'ordre n et de rang n, donc inversible.

Décomposition selon les valaurs singulières

Soit soit A une matrice de type $m \times n$ et de rang r, alors $A^* A \geq 0$, et comme $rg\left(A^* A\right) = r$, alors $A^* A$ possède r valeurs propres non nulles et positives, notées $\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_r^2$, on appelle valeurs singulières leurs racines positives $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r$.

Théorème:

Soit soit A une matrice de type $m \times n$ et de rang $r \geq 1$, alors $\exists$ U et V matrices unitaires d'ordres m et n respectivement telles que $A = U\ \Sigma\ V^*$ où $\Sigma = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$S = diag\left(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r\right)$, et $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r \succ 0$.

Preuve:

Notons les valeurs singulières de A par $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r \succ 0 = \sigma_{r+1} = ... = \sigma_n$.

Soient $v_i\ \ i = 1, ..., n$ les vecteurs propres de A^*A, notons $V_1 = (v_1, ..., v_r)$, $V_1 = (v_{r+1}, ..., v_n)$ et $S = diag\left(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r\right)$, or $A^*AV_1 = (\sigma_1^2 v_1, \sigma_2^2, ..., \sigma_r^2 v_r) = V_1 S^2 \Rightarrow V_1^* A^* A V_1 = S^2 \Rightarrow S^{-1} V_1^* A^* A V_1 S^{-1} = I_r$ et comme $A^*AV_2 = 0 \Rightarrow V_2^* A^* A V_2 = AV_2 \left(AV\right)^* = 0 \Rightarrow AV_2 = 0$.

Soit $U_1 = AV_1 S^{-1}$, alors $U_1^* U_1 = I_r$, on complète U_1 afin d'obtenir une matrice unitaire $U = \left(U_1 \ \ U_2\right)$.

Donc

$$U^*AV = \begin{pmatrix} U_1^* \\ \\ U_2^* \end{pmatrix} A\left(V_1 \ \ V_2\right) = \begin{pmatrix} U_1^*AV_1 & U_1^*AV_2 \\ \\ U_2^*AV_1 & U_2^*AV_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^*AV_1 & 0 \\ \\ U_2^*AV_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $U_2^*AV_1 = U_2^*U_1S = 0$, car $U_2^*U_1 = 0$.

Donc

$$U^*AV = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple:

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

On a $A^*A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, les valeurs propres sont 2 et 1; les valeurs singulières $\sqrt{2}$ et 1.

$S = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on calcule les vecteurs propres, on obtient $V = V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$U_1 = AV_1S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

On complète U_1par le vecteur $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t = U_2$, donc $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Décomposition polaire:

Par analogie à la décomposition d'un nombre complexe $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho \geq 0$ et $\left|e^{i\theta}\right| = 1$; on a :

Théorème:

Pour toute matrice carrée, il existent une matrice $P \geq 0$ et une matrice unitaire U_0 telles que $A = PU_0$.

Preuve:

Considérons la décomposition de A selon les les valeurs singulières, $A = U \ \Sigma \ V^* = A = U \ \Sigma \ (U^*U) \, V^*$.
Posons $P = U \ \Sigma \ U^*$ et $U_0 = UV^*$.

On vérifie que $P \geq 0$ et que U_0 est unitaire.

Forme réduite de Jordan:

On va considérer par la suite des matrices carrées, la théorie de Schur en

a donné la forme triangulaire, or la forme de Jordan reste la plus proche de la forme diagonale, qui est la forme la plus simple.
On commence par introduire des notions en relation.

On appelle bloc de Jordan une matrice triangulaire de la forme:

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & . & 0 \\ & \lambda & 1 & 0 & . \\ & & . & . & 0 \\ & 0 & & . & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

On appelle forme de Jordan, une matrice partitionnée de la forme:

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & & \\ & J_{\lambda_2} & 0 & \\ & 0 & . & \\ & & & J_{\lambda_r} \end{pmatrix}$$

On montre que toite matrice carrée est semblable à une matrioce de la forme de Jordan, c'est à dire :

Il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}JP$.

On va adopter une méthode pratique pour construire la réduite de Jordan.

On remarque que si A est une application linéaire, on a les inclusions suivantes:

$N(A) \subset N(A^2) \subset ...$ et

$R(A) \subset R(A^2) \subset ....$

Dans les deux cas, les suites d'inclusions demeurent stationnaires, donc il existe un exposant k tel que

$N(A^k) = N(A^{k+1}) = ...$et

$R(A^k) = R(A^{k+1}) = ...$

On a la

Définition:

On appelle indice d'une matrice carrée A le plus petit entier k tel que $rg(A^k) = rg(A^{k+1})$, on note $ind(A) = k$.

-Si A est inversible, alors $ind(A) = 0$.

-Si A est un idempotent, alors $ind(A) = 1$.

Proposition:

Soit A une matrice carrée, alors les assersions suivantes sont équivalentes:

1- $ind(A) = k$.

2- $rg(A^k) = rg(A^{k+1})$.

3- $R(A^k) = R(A^{k+1})$.

4- $N(A^k) = N(A^{k+1})$.

5- $R(A^k) \cap N(A^k) = \{0\}$.

6- $X = R(A^k) \oplus N(A^k)$.

Indice d'une valeur propre:

Soit λ une valeur propre de A, on appelle indice de λ la grandeur $ind(A - \lambda I)$.

On a donc

$R\left(A-\lambda I\right)^{k}=R\left(A-\lambda I\right)^{k+1}$
$rg\left(A-\lambda I\right)^{k}=rg\left(A-\lambda I\right)^{k+1}$
$N\left(A-\lambda I\right)^{k}=N\left(A-\lambda I\right)^{k+1}$

Soit A une matrice carrée, $\sigma\left(A\right)=\left\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\right\}$ le spectre de A.
1- Notons α_i=dim $N(A-\lambda_i I)$,$alors\alpha_i$ est le nombre de blocs en λ_i :

$$J_{\lambda_i}=\begin{pmatrix} J_{1,\lambda_i} & & & \\ & J_{2,\lambda_i} & 0 & \\ & 0 & . & \\ & & & J_{\alpha_i,\lambda_i} \end{pmatrix}$$

Où

$$J_{k,\lambda_i}=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & . & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix},\ k=1,2,...,\alpha_i.$$

2- Le plus grand bloc dans J_{λ_i} est d'ordre $k_i=ind\left(\lambda_i\right).$
3- Le nombre de blocs d'ordre k est donné par:
$n_k\left(\lambda_i\right)=r_{k-1}\left(\lambda_i\right)-2r_k\left(\lambda_i\right)+r_{k+1}\left(\lambda_i\right)$, où $r_k\left(\lambda_i\right)=rg\left(A-\lambda_i I\right)^{k}.$

Donc, on a besoin chaque fois d'évaluer $rg\left(A-\lambda_i I\right)^{k}.$

Exemple:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Les valeurs propres: $1,-1$, donc $J=\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_{-1} \end{pmatrix}$, l'un des blocs doit être d'ordre 2, on calcule
$k_1=ind\left(1\right)$

$$A-I=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \left(A-I\right)^2=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg\left(A-I\right)=2,\quad rg\left(A-I\right)^2=1$

$$\left(A-I\right)^3=\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ rg\left(A-I\right)^3=1, \text{on conclue que } ind\left(1\right)=\mathbf{2}, \text{et}$$

donc,

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ valeurs propres } 3, -2, 2$$

$$(A-3I) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad rg\,(A-3I) = 3, \quad (A-3I)^2 =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & -3 \\ 5 & 13 & -6 & -12 \\ 0 & -6 & 1 & -6 \\ -5 & -12 & 6 & 13 \end{pmatrix}, \quad rg\,(A-3I)^2 = 3$$

Donc $ind\,(3) = 1$

$$(A+2I) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \; rg\,(A+2I) = 3, (A+2I)^2 = \begin{pmatrix} 25 & 27 & 0 & 27 \\ -5 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 24 & 16 & 24 \\ 5 & 8 & -4 & 8 \end{pmatrix},$$
$rg\,(A+2I)^2 = 3$

Donc $ind\,(-2) = 1$

$$(A-2I) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \; rg\,(A-2I) = 3 : \quad (A-2I)^2 =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 8 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad rg\,(A-2I)^2 = 2$$

$$(A-2I)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ -13 & -35 & 16 & 29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 35 & -16 & -29 \end{pmatrix}, \; rg\,(A-2I)^3 = 2.$$

Donc $ind\,(2) = 2$

En résumé, le plus grand bloc correspondant à la v.p. 2 est d'ordre 2, les autres valeurs d'indices 1,

$$j = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$