Département de Mathématique
Faculté de Math. et Informatique
Université M. Benboulaid Batna

Master1, Analyse fonctionnelle
Matière: Théorie des matrices

Inverses généralisés

La notion d'inversibilité joue un rôle important en mathématique, car beaucoup de problèmes sont posés d'une manière où la solution s'articule, en effet, sur la recherche de l'inverse. L'exemple de l' équations algébrique $ax + b = c$, $a \neq 0$ montre l'intérêt des inverses de b dans $ax = -b + c$, et de a dans $x = a^{-1}(-b + c)$.

Un autre exemple est le système linéaire suivant:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_n
\end{array}
$$

exprimé sous la forme matricielle $Ax = b$, où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$

On remarque que:

- Si A est carrée et inversible, alors le système $Ax = b$ possède une solution unique: $x = A^{-1}b$.

- Si A est carrée, mais non inversible, ou rectangulaire, on est devant un doute d'avoir une solution du système, même quand cette solution existe, le problème d'unicité se pose aussi.

L' idée d' inverse généralisé essaie de résoudre des problèmes de ce type, en proposant une matrice qui possède des proprietés aussi proches de celles de l'inverce, quand ce dernier n' existe pas.

Revenons à notre question, si X est une matrice donnant la solution $x = Xb$, alors on a $Ax = AXb = AXAx$, on a donc $AXA = A$, cette relation est verifiée si X est l' inverse de A.

Dans la théorie des inverses généralisés, on rencontre différents types d'inverses.

L'inverse interieur

On appelle inverse interieur d' une matrice A de type $m \times n$, $(m = n)$ non exclu, une matrice X de type $n \times m$ verifiant $AXA = A$.

Si A est inversible, inversible à gauche, ou à droite, alors ces invrses sont des inverses interieurs.

On note l'ensemble des inverses interieurs par $A(1)$.

Existence:
Proposition:

Toute matrice possède au moins un inverse interieur.

Preuve:

Soit A une matrice de type $m \times n$ et de rang $r \geq 1$, alors A peut être mise sous la forme:

$A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$, P et Q étant inversibles, soit $X = Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & Y \\ V & Z \end{pmatrix} P^{-1}$, Y , V et Z sont arbitraires, mais de formes appropriées.

On vérifie

$AXA = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QQ^{-1} \begin{pmatrix} I_r & Y \\ V & Z \end{pmatrix} P^{-1}P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q = A$.

La forme de X montre que l'on a pas d'unicité d'inverse interieur.

Remarque:

On exprime aussi A sous la forme:

$A = P \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$, où A_1 est une natrice inversible, alors $X = Q^{-1} \begin{pmatrix} A_1^{-1} & Y \\ V & Z \end{pmatrix} P^{-1}$ un inverse interieur.

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ alors } X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est un inverse interieur.}$$

Proposition:

Si X est un inverse interieur de A, alors
- AX et XA sont des idempotents, on a
- $R(AX) = R(A)$ et $N(XA) = N(A)$.

Preuve:

On a $(AX)^2 = (AXA)X = AX$.
$R(A) \supset R(AX) \supset R(AXA) = R(A)$ et
$N(A) \subset N(XA) \subset N(AXA) = N(A)$.
On remarque que $rg(A) = rg(AXA) \leq rg(X)$.

L'nverse exterieur:

On appelle inverse interieur d' une matrice A de type $m \times n$, une matrice X de type $n \times m$ verifiant $XAX = X$.

Si A est inversible, inversible à gauche, ou à droite, alors ces invrses sont des inverses exterieurs.

On note l'ensemble des inverses exterieurs par $A(2)$.

On a $X \in A(2) \Leftrightarrow A \in X(1)$.

L'nverse généralisé:

On appelle inverse généralisé, ou inverse symetrique d' une matrice A de type $m \times n$, une matrice X de type $n \times m$ verifiant $AXA = A$ et $XAX = X$ simultanément.

Si A est inversible, inversible à gauche, inversible à droite, alors ces invrses sont des inverse généralisés.

On note l'ensemble des inverses généralisés par $A(1,2)$.

Existence:
Proposition:

Toute matrice possède au moins un inverse généralisé.

Preuve:

Soit A une matrice de type $m \times n$ et de rang $r \geq 1$, alors A peut être mise sous la forme:
$A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$, P et Q étant inversibles, soit $X = Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, Y est arbitraire de forme appropriée.

On vérifie
$AXA = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QQ^{-1} \begin{pmatrix} I_r & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q = A.$

$XAX = Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q\, Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = X.$

La forme de X montre que l'inverse généralisé n'ast pas unique.

Proposition:

Si X est un inverse généralisé de $A : E \to F$, alors
- AX et XA sont des idempotents, et on a
- $R(AX) = R(A)$
- $R(XA) = R(X)$
- $N(XA) = N(A)$.
- $N(AX) = N(X)$
-$E = N(A) \oplus R(X)$.
- $F = N(X) \oplus R(A)$
- $rg(A) = rg(A)$.

Preuve:

Comme A et X sont chacun inverse interieur de l'autre, on a directement les relations en images,en noyaux et en rangs.

Et du fait que XA est une projection définie sur E, on a
$E = N(XA) \oplus R(XA) = N(A) \oplus R(X)$.

De même AX est une projection définie sur F, on a
$F = N(AX) \oplus R(AX) = N(X) \oplus R(A)$.

Application:

Dans ce paragraphe, on va découvrir l'intérêt de l'inverse interieur dans la solution des équtions matricielles.

Théorème:

Soient A, B et C de types $m \times n$, $p \times q$ et $m \times q$ respectivement, alors l'équation matricielle

$$AXB = C \quad ... \qquad (1)$$

Admet une solution si et seulememt s'ils existent A_1et B_1 inverses interieurs de A et B respectivement tels que

$$AA_1CB_1B = C \quad ... \;\; (2)$$

Si la condition (2) est vérifiée, slors la solution générale de l'équation (1) est:

$$X = A_1CB_1 + Y - A_1AYBB_1 \text{ , } Y \text{ est arbitraire de type } n \times p.$$

Preuve:

Si (2) est véifiée, alors $X = A_1CB_1$ est une solution de (1).

Réciproquement, si X est solution de (1), alors $C = AXB = AA_1AXBB_1B = AA_1CB_1B$, la condition est nécéssaire.

De plus si Y est une matrice arbitraire de type $n \times p$, alors $W = Y - A_1AYBB_1$ est tel que $AWB = 0$,donc

$X = A_1CB_1 + Y - A_1AYBB_1$.

Corollaire:

Considérons le système linéaire $Ax = b$,alors une condition nécéssaire et suffisante pour que le le système admette une solution est que $AA_1b = b$, Si cette condition est vérifiée, slors la solution générale du système est:

$x = A_1b + v - A_1Av$. $\qquad v$ est un vecteur à n lignes.

Exemple:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on choisit $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ comme inverse interieur, le système $Ax = b$, $b = (1, 2, 0, 1)^t$ n'admet pas de solution, car $AA_1b \neq b$. On vérifie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par contre pour $b = (1, 2, 0, 0)$,on a $AA_1b = b$, on a

$$A_1b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ donc,}$$

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + v - A_1Av, \ v = (x_1, x_2, ..., x_n)^t.$$

L'inverse de Moore-Penrose:

On appelle inverse de Moore-Penrose d'une matrice A , un inverse généralisé (symetrique) , X tel que les idempotents AX et XA soient auto-adjoints, c'est à dire une matrice X vérifiant les quatre équations:

$AXA = A$ ... (1)

$XAX = X$ ... (2)

$(AX)^* = AX$ ... (3) et

$(XA)^* = XA$ ... (4)

On note M-P pour désigner l'inverse de Moore-Penrose qui sera noté A^+dans la suite.

Si A est inversible, alors A^{-1} est aussi M-P de A.

Exemples:

1- Soit $\Sigma = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & 0 & \\ & & ... & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ telle que $\lambda_i \neq 0$

alors $\Sigma^+ = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & 0 & \\ & & ... & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

2- $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \end{pmatrix}$ où A_1 est une matrice inversible, alors
$A^+ = \begin{pmatrix} A_1^{-1} \\ \\ 0 \end{pmatrix}$.

Théorème:

Toute matrice possède un M-P inverse.

Preuve:

soit A une matrice de type $m \times n$ et de rang $r \geq 1$, alors par la décomposition selon les valeurs singulières, $\exists$ U et V matrices unitaires d'ordres m et n respectivement telles que $A = U\ \Sigma\ V^*$ où $\Sigma = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$S = diag\left(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r\right)$, et $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r \succ 0$.
On vérifie que $A^+ = V\ \Sigma^+ U^*$.
Ici $\Sigma^+ = \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
L'un des avantages du M-P inverse est son unicité.

Théorème:

L'inverse de Moore-Penrose est unique.

Preuve:

Supposons X et Y deux M-P inverses de A, alors,

$X = (XA)X = (A^*)X^*X = (A^*Y^*A^*)X^*X = A^*Y^*(A^*X^*)X = A^*Y^*(A^*X^*)X = A^*Y^*(XAX) = A^*Y^*X = YAX =$
$Y(AY)(AX) = YY^*(A^*X^*A^*) = YY^*A^* = YAY = Y.$

On remarque aussi que AA^+et A^+A sont des projections orthgoneles sur $R(A)$ et $R(A^*)$ respectivement,

On considère la partition: $E = N(A) \oplus R(A^+)$

On remarque que $R(A^+A) = R(A^+) = N(A)^{\perp} = R(A^*)$.

on note aussi $AA^+ = P_{R(A)}$ et $A^+A = P_{R(A^*)}$.

On a donc,

Proposition:

Si $A : E \to F$, alors
$E = N(A) \oplus R(A^*)$
$F = R(A) \oplus N(A^*)$.
On peut démontrer les proprietés suivantes:

Proposition:

On a
1- $(A^+)^+ = A^+$
2- $(A^*)^+ = (A^+)^*$
3- $(A^*A)^+ = A^+(A^*)^+$
4- $A^*AA^+ = A^+AA^* = A^*$
5- $(A^*A)^+A^* = A^*(AA^*)^+ = A^+$.

Application:
Proprietés minimales de l'inverse de Moore-Penrose.

Considérons une autre fois le système linéaire :

$$Ax = b \qquad ... \quad (1)$$

On sait qu' une condition nécéssaire et suffisante pour que le le système (1) admette une solution est que $AA_1b = b$, pour un certain inverse interieur, en particilier si $AA^+b = b$, i.e $b \in R(AA^+) = R(A)$.

Si cette condition est n'est pas vérifiée, alors on considère la quantité $r = b - Ax$, appelée reste, ou partie résiduelle.

Notre but est de chercher à minimiser la valeur $\|r\|$.

Une valeur x_0 est dite solution approchée de (1) , si elle minimise $\|r\|$ dans le sens où:

$\|Ax_0 - b\| \leq \|Ax - b\|\,, \quad \forall x \in E.$

Théorème:

Soit le système linéaire $Ax = b$, alors $x_0 = A^+b$ est une solution approchée de ce système.

Preuve:

Compte tenu de la décomposition:
$F = R(A) \oplus N(A^*)$, alors
$b = P_{R(A)}b + P_{N(A^*)}b$,donc
$Ax - b = Ax - P_{R(A)}b - P_{N(A^*)}b$.
On remarque que $Ax - P_{R(A)}b \in R(A)$ et $P_{N(A^*)}b \in N(A^*)$, donc

$$\begin{aligned}\|Ax - b\|^2 &= \left\|Ax - P_{R(A)}b\right\|^2 + \left\|P_{N(A^*)}b\right\|^2 \\ &= \|r\|^2\end{aligned}$$

Cette valeur atteint son minimum pour $Ax = P_{R(A)}b$, et comme $R(A) = R(AA^+)$, on obtient
$Ax = AA^+b$, c'est à dire $x_0 = A^+b$ est une solution approchée de (1) .

Remarque:

La solution approchée n'est pas unique, car les éléments de la forme:
$x = A^+b + v - A^+Av$ minimisent $\|r\|$.
En pratique, on cherche la solution approchée de norme minimale, et suite à la décomposition:
$E = N(A) \oplus R(A^*)$, on a
$\|x\|^2 = \|A^+b\|^2 + \|v - A^+Av\|^2$.
Donc la solution approchée de norme minimale est $x_0 = A^+b$.

Exemple:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ici $A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, le système $Ax = b$, $b = (1, 2, 0, 1)^t$ n'admet pas de solution,

alors $x_0 = A^+b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est la solution approchée de norme minimale.

Comme on vient de le signaler, on rencontre différents types d'inverses, où chaqun d'eux s'adapte mieux à certains pronlèmes, parmi ces inverses, on va considérer:la solution approchée de norme minimale.

L'inverse de Drazin:

On a montré que si A est une matrice carrée d'indice k, alors A peut être mise sous la forme:

$A = P \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} P^{-1.}$

C inversible et N nilpotente, $N^k = 0$.

L'idée de la preuve est que, comme $ind\,(A) = k$,alors, $E = R\left(A^k\right) \oplus N\left(A^k\right)$, le choix d'une base suite à cette décomposition donne $A^k = P \begin{pmatrix} C^k & 0 \\ 0 & N^k \end{pmatrix} P^{-1}$, d'où la forme de A.

On définit

$A^D = P \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} P^{-1.}$, on vérifie,

Proposition:

1-$A^D A A^D = A^D ... (1)$
2- $AA^D = A^D A ... (2)$
3- $A^{k+1} A^D = A^k ... (3)$

Définition:

Soit A une matrice carrée d'indice k, alors, il existe une matrice carrée A^D, vérifiant $1, 2$ et 3 appalée inverse de Drazin de A.

On remarque que si A est inversble, alors $A^D = A^{-1}$.

Proposition:

Soit A une matrice carrée d'indice k,alors,
1- $R\left(A^D\right) = R\left(A^k\right)$
2- $N\left(A^D\right) = N\left(A^k\right)$
3- $AA^D = A^D A = P_{R\left(A^k\right)}$.
4- $\left(A^*\right)^D = \left(A^D\right)^*$
5- $\left(A^k\right)^D = \left(A^D\right)^k$ pour tout naturel k.

Proposition:

Soit A une matrice carrée d'indice k, alors,
$AA^D A = A$ si et seulement si $k \leq 1$.

Preuve:

Si $k = 0$, alors $A^D = A^{-1}$.
Supposons $k \geq 1$, alors $AA^D A = A$
$P\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}P^{-1.}P\begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1.}P\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}P^{-1.} = P\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1.}$
est vérifié si et seulement si $N = 0$, et commec $A^k = P\begin{pmatrix} C^k & 0 \\ 0 & N^k \end{pmatrix}P^{-1.}$'ce qui donne $k = 1$.
Un cas particulier de l'invrse de Drazin est le groupe inverse.

Le groupe inverse:

On appelle le groupe inverse, un inverse de Drazin d'indice $k \leq 1$.
Donc le groupe inverse, noté $A^\sharp$ verifie les équations:
1- $AA^\sharp \ A = A$
2- $A^\sharp \ AA^\sharp = A^\sharp$
3- $AA^\sharp = A^\sharp \ A$.

Proposition:

Si $A^\sharp$existe, alors, il est unique.

Preuve:

Si X est un autre groupe inverse de A, alors
$A^\sharp = \left(A^\sharp\right)^2 A = \left(A^\sharp\right)^2 A^2 X = A^\sharp \left(A^\sharp A^2\right) X = A^\sharp AX$
$= A^\sharp \left(A^2 X\right) X = \left(A^\sharp A^2\right) X^2 = AX^2 = X$.

Proposition:

1- Si A est non singulière, alors $A^\sharp = A^{-1}$
2- $\left(A^\sharp\right)^\sharp = A$.
3- $\left(A^*\right)^\sharp = \left(A^\sharp\right)^*$.

4- $\left(A^{k}\right)^{\sharp}=\left(A^{\sharp}\right)^{k}$ pour tout naturel k.

Remarque:

Si on note $\left(A^{\sharp}\right)^{k}=A^{-k}$, alors $AA^{\sharp}=A^{0}$, alors
$G=\left\langle A^{k},k\in\mathbb{N}\right\rangle$ est un groupe d'unité $AA^{\sharp}$, ce qui justifie l'appelation du groupe inverse.

Proposition:

Supposons A telle que $ind\left(A\right)\leq 1$, alors $A^{\sharp}=A^{+}$, si et seulement si $AA^{+}=A^{+}A$.

Preuve:

Supposons que $AA^{+}=A^{+}A$, alors A^{+} vérifie les équations du groupe inverse, donc $A^{\sharp}=A^{+}$.
Réciproquement, si $A^{\sharp}=A^{+}$, alors,
$AA^{+}=AA^{\sharp}=A^{\sharp}\,A=A^{+}A$.