Département de Mathématique
Faculté de Math. et Informatique
Université M. Benboulaid Batna 2

Master1, Analyse fonctionnelle
Matière: Théorie des matrices

Rang de matrices

Pour quoi le rang d'une matrice ?

Considérons le système linéaire $Ax = b$, avant de procéder à la résolution du système donné par la matrice A, une question pertinente est posée sur le **rang** de A.

On rappelle que si A est carrée d'ordre n,telle que $rg(A) = n$; alors A est inversible, et si A est de type $m \times n$ et que $rg(A) = n$, alors A représente une injection, d'autre part si $rg(A) = m$, alors A représente une surjection, mais ce n'est pas tout!

On rappelle que le rang de la matrice A, est la dimension de l'image de A,et comme les colonnes d'une matrice est une partie génératrice de $R(A)$,c'est donc le nombre de vecteurs colonnes linéairement indépendants de cette matrice.

Considérons A comme application linéaire d'un espace vectoriel X de dimension n dans un espace vectoriel Y de dimension m.

On commence par donner les proprietés fondamentales du rang.

On a quelques relations directes:

Proposition:
Si A est de type $m \times n$, alors $rg(A) \leq \min(m, n)$.

Preuve:
On sait que $rg(A) = \dim R(A) \leq \dim X = n$, et comme $R(A) \subset Y$, alors $rg(A) \leq \dim Y = m$.

On a le théorème fondamental:

Théorème:
Si A est une matrice de type $m \times n$, alors

$$n = \dim N(A) + rg(A)$$

Cette formule s'appelle la formule du rang.

Preuve:
Soit F un sous espace supplémentaire de $N(A)$ dans X, A est injective sur F, donc
$\dim F = \dim A\,(F) = \dim R(A) = rg(A)$; ce qui donne
$n = \dim F + \dim N(A) = rg(A) + \dim N(A)$.

Corollaire:

On a $rg(A) = rg(A^t) = rg(A^*)$

Preuve:
Montrons que $rg(A) = rg(A^*)$.
Du fait que $N(A)^\perp = R(A^*)$, et
$\dim N(A)^\perp = n - \dim N(A)$, alors
$rg(A^*) = n - \dim N(A) = rg(A)$.

Une conséquence directe de la formule du rang est:

Proposition:
Soit A est de type $m \times n$ alors $rg(A) = n$ si et seulement si A représente une injection.
Preuve:
Dans la formule du rang, on obtient $rg(A) = n$ ssi $N(A) = \{0\}$.

Le résultat dual est le suivant:

Proposition:
Soit A est de type $m \times n$ alors $rg(A) = m$, si et seulement si A représente une surjection.
Preuve:
A est de type $m \times n$ alors $rg(A) = m$, A^t est de type $n \times m$ et $rg(A^t) = m$, on applique la proposition précédente, on obtient
$N(A^t) = \{0\}$ ce qui équivaut la surjectivité de A.

On a le

Corollaire:
Soit A est matrice carrée d'ordre n, alors les propositions suivantes sont équivalentes :
1- $rg(A) = n$

2- A est une injection
3- A est une surjection
4- A est une bijection

Proposition:
Pour les matrices A et B telles que le produit AB soit défini,on a
$rg(AB) \leq \min(rg(A), rg(B))$

Preuve:
On a $R(AB) \subset R(A)$, donc $rg(AB) \leq rg(A)$,on utilise cette inégalité dans ce qui suit:
$rg(AB) = rg(AB)^t = rg(B^t A^t) \leq rg(B^t) = rg(B)$,donc

$$rg(AB) \leq \min(rg(A), rg(B))$$

Corollaire:
Si P et Q sont des matrices inversibles de types appropriés, alors
$rg(PA) = rg(AQ) = rg(A)$.
En particulier, deux matrices équivalentes ont même rang.
En terme d'égalité, on a :

Théorème (Sylvester) :
Pour les matrices A et B telles que le produit AB soit défini,on a
$rg(AB) = rg(B) - \dim(R(B) \cap N(A))$

Preuve:
On considère l'opérateur AB comme $\widetilde{A}$ linéaire agissant sur $R(B)$,c'est à dire $R(AB) = R(\widetilde{A})$ et $N(\widetilde{A}) = R(B) \cap N(A)$,
et de $\quad \dim R(B) = rg(\widetilde{A}) + \dim N(\widetilde{A})$,on obtient :
$rg(B) = rg(AB) + \dim(R(B) \cap N(A))$.

Une matrice A de type $m \times n$ est dite de rang complet si $rg(A) = m$ ou $rg(A) = n$.
Si $rg(A) = n$, alors A est injective, donc inversible à gauche, et si $rg(A) = m$, alors A est surjective, donc inversible à droite.

Proposition:
Soit une matrice A de type $m \times n$ et telle que $rg(A) = n$,alors pour toute matrice B telle que le produit AB soit défini,on a
$rg(AB) = rg(B)$.

Preuve:

$rg(A) = n$, donc A est injective, ce qui donne $N(A) = \{0\}$, donc $R(B) \cap N(A) = \{0\}$, et d'après la formule de Sylvester,

$rg(B) = rg(AB)$.

Corollaire:

Soit une matrice A de type $m \times n$ et telle que $rg(A) = m$,alors pour toute matrice B telle que le produit BA soit défini,on a

$rg(BA) = rg(B)$.

Preuve:

Du corollaire précédent, $rg(A^t) = n$, donc $rg(BA) = rg(BA)^t = rg(A^t B^t) = rg(B^t) = rg(B)$.

En terme d'inégalité, le théorème de Sylvester admet la fomulation suivante:

Corollaire:

Soient une matrice A de type $m \times n$, B une matrice telle que le produit AB soit défini, alors

$rg(A) + rg(B) \leq rg(AB)$

Preuve:

Par le théorème de Sylvester, on a

$rg(B) = rg(AB) + \dim (R(B) \cap N(A))$, or $R(B) \cap N(A) \subset N(A)$ c'est à dire $\dim R(B) \cap N(A) \leq \dim N(A)$, donc

$rg(A) + \dim (R(B) \cap N(A)) \leq n$,ce qui donne

$rg(B) + rg(A) = rg(A) + \dim (R(B) \cap N(A)) + rg(AB) \leq n + rg(AB)$.

Dans ce qui suit, on va considérer les formules concernant des matrices partitionnées.

Proposition:

Si A et B ont le même nombre de lignes, alors

$rg \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \leq rg(A) + rg(B)$

Preuve:

$R \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$ est l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de A et B ensembles, donc

$rg \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} = \dim R(A) + \dim R(B) - \dim (R(A) \cap R(B)) \leq rg(A) + rg(B)$.

On a le

Corollaire:

Si A et B ont le même nombre de colonnes, alors
$rg\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq rg(A) + rg(B)$

Preuve:

On a
$rg\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}^t = rg\begin{pmatrix} A^t & B^t \end{pmatrix} \leq rg(A^t) + rg(B^t) = rg(A) + rg(B)$

Corollaire:

Pour A et B de même type, on a

$$rg(A+B) \leq rg\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \leq rg(A) + rg(B)$$
$$rg(A+B) \leq rg\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq rg(A) + rg(B)$$

Preuve:
On remarque que:
$A + B = \begin{pmatrix} I & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ et que
$A + B = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix}$ d'où les inégalités

$$rg(A+B) \leq rg\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \quad \text{et}$$
$$rg(A+B) \leq rg\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

Proposition:
Pour les matrices A et B , on a

$$rg\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} = rg(A) + rg(B)$$

Preuve:

On remarque que $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$, il suffit de le montrer pour l'une d'elles.

Et comme $rg\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} = rg(X)$,alors

$rg\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = rg(A) + rg(B) - \dim\left(R\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \cap R\begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}\right)$

Or $R\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \cap R\begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix} = \{0\}$, car un élément de l'intersection est de la forme $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$, où les vacteurs v et w doivent être nuls.

On admet le résultat suivant, concernant une matrice partitionnée triangulaire (sup. ou inf.):

Proposition:

$$rg\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & .. & .. & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & & & . \\ . & & & . & . \\ 0 & . & . & 0 & A_{nn} \end{pmatrix} \geq rg(A_{11}) + rg(A_{22}) + ... + rg(A_{nn}).$$

On s'intereesse au cas particulier:

$rg\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & X \end{pmatrix} \geq rg(A) + rg(B)$ et cela pour toute matrice X de type approprié.

On utilise ce résultat pour montrer :

Théorème (Sylvester) :

Pour les matrices A, B et C telles que le produit ABC soit défini,on a $rg(ABC) \geq rg(AB) + rg(BC) - rg(B)$.

Preuve:

On applique les opérations élémentaires sur la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & AB \\ BC & B \end{pmatrix} \underset{\sim}{L_1 - AL_2} \begin{pmatrix} -ABC & 0 \\ BC & B \end{pmatrix} \underset{\sim}{C_1 - C_2C} \begin{pmatrix} -ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

On a donc

$$rg\begin{pmatrix} 0 & AB \\ BC & B \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = rg(ABC) + rg(B)$$

Mais $rg\begin{pmatrix} 0 & AB \\ BC & B \end{pmatrix} \geq rg(AB) + rg(BC)$ on obtient:

$rg(AB) + rg(BC) \geq rg(ABC) + rg(B)$.

On donne ici un résultat concernant les systèmes linéaires:

Le système suivant:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$
....
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m$

Est exprimé sous la forme matricielle $Ax = b$, ou bien

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

Le système $Ax = b$ est dit consistent s'il admet au moins une solution.

Le système $Ax = 0$ est consistent. On donne les conditions nécéssaires et suffisantes pour qu'un système soit consistent.

Théorème:

Considérons le système $Ax = b$, alors les propositions suivantes sont équivalentes:

1- Le système $Ax = b$ est consistent
2- $b \in R(A)$
3- $rg(A \;\; b) = rg(A)$.

Preuve:

1)$\Leftrightarrow$ 2) Si Le système $Ax = b$ est consistent, équivaut l' existence de x_0 tel que $Ax_0 = b$; $b \in R(A)$.

2)$\Rightarrow$ 3) Comme $b \in R(A)$, alors $R(A \;\; b) \subset R(A)$, donc $rg(A \;\; b) \leq rg(A)$, mais $rg(A \;\; b) \geq rg(A)$, ce qui donne égalité.

3)$\Rightarrow$ 1) $rg(A \;\; b) = rg(A)$ montre que $R(A \;\; b) = R(A)$, donc $b \in R(A)$

Décomposition de matrices

On a montré dans le chapitre précédant qu'une matrice A de type $m \times n$ est représentable sous la forme : $A = PBQ$, où P et Q sont inversibles, que $rg(A) = rg(B)$ et enfin B est plus simple et maniable, généralement : $B = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si $rg(A) = r$.

Dans ce qui suivera, on va considérer certains cas particuliers :

Décomposition de schur :

Théorème:

Soit A une matrice d'ordre m, $\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres.

Alors $\exists U$ unitaire tels que : $U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & * & \\ & 0 & & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

i.e.A est représentable par une matrice triangulaire supérieure.

Preuve :

Soit x_1 un vecteur unitaire associé à la valeur propre λ_1, i.e. $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ avec $||x_1|| = 1$.

On complète $\{x_1\}$ pour obtenir une base orthonormée $S = (x_1, y_2, ..., y_n)$.

S est une matrice unitaire d'ordre n, on a :

$AS = (Ax_1, Ay_2, ..., Ay_n)$

$=(\lambda_1 x_1, Ay_2, ..., Ay_n)$

$=S(\lambda_1 S^{-1}x_1, S^{-1}Ay_2, ..., S^{-1}Ay_n)$

Du fait que $S^{-1}S = I_n$, alors $S^{-1}x_1 = (\lambda_1, 0, ..., 0)^t$

Et comme $S^{-1} = S^*$ (S unitaire), on a

$$S^*AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \\ . & B \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Où B est carrée d'ordre $n-1$.

Le même procédé appliqué à B, conduit à l'existence d'une matrice S_1 d'ordre $n-1$ tq $S_1^* B S_1$ soit triangulaire supérieure.

La matrice $U = S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \\ 0 & S_1 \end{pmatrix}$ est unitaire (vérifier !)

Et $U^*AU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \\ 0 & S_1^* \end{pmatrix} S^*AS \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \\ 0 & S_1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \\ 0 & & \\ . & & \\ 0 & & S_1^*BS_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * & \\ 0 & \lambda_2 & & \\ . & & . & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ce procédé s'appelle a décomposition de Schur.

Corollaire :

Si $A = A^*$, alors A est diagonalisable.

Preuve :

Selon Schur, $\exists U$ unitaire tq :

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * & \\ 0 & \lambda_2 & & \\ . & & . & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } (U^*AU)^* = U^*AU = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & & \\ 0 & \overline{\lambda_2} & & \\ * & & . & \\ 0 & & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Donc, par comparaison, on obtient:

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \\ . & & . & . \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On vient de montrer que si $A = A^*$, alors les valeurs propres de A sont réelles.

Corollaire :

Si A est normale, alors A est diagonalisable.

Preuve :

D'après Schur, $\exists U$ unitaire, B triangulaire supérieure tq : $U^*AU = B$. ou bien $A = UBU^*$, d'où $A^* = UB^*U^*$ et $AA^* = UBB^*U^*$, d'autre part $A^*A = UB^*BU^*$, donc A normale $<=>$ B normale, donc

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_{12} & . & . \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \\ . & & . & . \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & & 0 \\ \overline{\lambda_{12}} & \overline{\lambda_2} & 0 & \\ . & & . & . \\ 0 & & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & & \\ & \overline{\lambda_2} & & \\ * & & . & \\ & & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ 0 & \lambda_2 & & \\ . & & & . \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ce qui donne :
$|\lambda_1|^2 + |\lambda_{12}|^2 + ... + |\lambda_{1n}|^2 = |\lambda_1|^2$ ce qui donne $\lambda_{1j} = 0$, $j = 2, 3, ..n$
et $|\lambda_2|^2 + |\lambda_{23}|^2 + ... + |\lambda_{2n}|^2 = |\lambda_{12}|^2 + |\lambda_2|^2$.
D'où $\lambda_{2j} = 0$, $j = 3, ..n$.
En continuant, en conclut que $\lambda_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.
Comme toute matrice diagonale est normale ; on peut citer les conclusions suivantes :

Théorème (décomposition spectrale):

Soit A une matrice carrée d'ordre n, ayant les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Alors A est normale si et seulement si $\exists$ U unitaire telle que $U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * & \\ 0 & \lambda_2 & & \\ . & & . & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Décomposition à rang complet

Définition : une matrice A de type $m \times n$ est dite de rang complet si $rg(A) = m$ ou $rg(A) = n$.

Soit A une matrice de rang $r \geq 1$; on dit que A admet une décomposition (factorisation) à rang complet, s'il existe F, G de même rang r telle que $A = FG$.

Théorème :

soit A une matrice de type $m \times n$ et de rang $r \geq 1$, alors $\exists F$ de type $m \times r$; G de type $r \times n$, $rg(F) = rg(G) = r$ et $A = FG$.

Preuve :

Comme $rg(A) = r$, alors A est équivalente à une matrice de la forme :
$B = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Autrement dit $\exists P_m$,Q_m inversibles tq : $A = P_m \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_m$

Décomposons $P_m = \begin{pmatrix} \underset{r}{F} & \underset{m-r}{P'} \end{pmatrix}$, et $Q_m = \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} G \\ \\ Q' \end{pmatrix} & \begin{array}{c} r \\ \\ n-r \end{array} \end{array}$

Il est clair que F et G possèdent les propriétés du théorème ; c'est à dire F est de type $m \times r$ et de rang r ; G de type $r \times n$ et de rang r , avec

$$A = \begin{pmatrix} F & P' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \\ \\ Q' \end{pmatrix} = (F \quad 0) \begin{pmatrix} G \\ \\ Q' \end{pmatrix} = FG.$$

Corollaire :

Si A est de rang complet ; alors l'une des matrices $A^t A$ ou AA^t est inversible.

Preuve :

Supposons $rg(A) = n$, donc A est inversible à gauche, donc $rg\left(A^t A\right) = rg(A) = n$.

$A^t A$ est carrée d'ordre n et de rang n, donc inversible.

Décomposition selon les valaurs singulières

Soit soit A une matrice de type $m \times n$ et de rang r, alors $A^* A \geq 0$, et comme $rg\left(A^* A\right) = r$, alors $A^* A$ possède r valeurs propres non nulles et positives, notées $\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_r^2$, on appelle valeurs singulières leurs racines positives $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r$.

Théorème:

soit A une matrice de type $m \times n$ et de rang $r \geq 1$, alors $\exists$ U et V matrices unitaires d'ordres m et n respectivement telles que $A = U\ \Sigma\ V^*$ où
$\Sigma = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$S = diag\left(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r\right)$, et $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r \succ 0.$

Preuve:

Notons les valeurs singulières de A par $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r \succ 0 = \sigma_{r+1} = ... = \sigma_n.$

Soients v_i $i = 1, ..., n$ les vecteurs propres de A^*A, notons $V_1 = (v_1, ..., v_r)$, $V_1 = (v_{r+1}, ..., v_n)$ et $S = diag\left(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r\right)$, or $A^*AV_1 = (\sigma_1^2 v_1, \sigma_2^2, ..., \sigma_r^2 v_r) = V_1 S^2 \Rightarrow V_1^* A^* A V_1 = S^2 \Rightarrow S^{-1} V_1^* A^* A V_1 S^{-1} = I_r$ et comme $A^* A V_2 = 0 \Rightarrow V_2^* A^* A V_2 = A V_2 \left(AV\right)^* = 0 \Rightarrow AV_2 = 0.$

Soit $U_1 = AV_1 S^{-1}$, alors $U_1^* U_1 = I_r$, on complète U_1 afin d'obtenir une matrice unitaire $U = (U_1 \ \ U_2)$.

Donc

$$U^*AV = \begin{pmatrix} U_1^* \\ \\ U_2^* \end{pmatrix} A \left(V_1 \ \ V_2\right) = \begin{pmatrix} U_1^* A V_1 & U_1^* A V_2 \\ \\ U_2^* A V_1 & U_2^* A V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^* A V_1 & 0 \\ \\ U_2^* A V_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $U_2^* A V_1 = U_2^* U_1 S = 0$, car $U_2^* U_1 = 0$.

Donc

$$U^*AV = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple:

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

On a $A^*A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, les valeurs propres sont 2 et 1; les valeurs singulières $\sqrt{2}$ et 1.

$S = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on calcule les vecteurs propres, on obtient $V = V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$U_1 = AV_1S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

On complète U_1par le vecteur $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t = U_2$, donc $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Décomposition polaire:

Par analogie à la décomposition d'un nombre complexe $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho \geq 0$ et $\left|e^{i\theta}\right| = 1$; on a :

Théorème:

Pour toute matrice carrée, il existent une matrice $P \geq 0$ et une matrice unitaire U_0 telles que $A = PU_0$.

Preuve:

Considérons la décomposition de A selon les les valeurs singulières, $A = U$ $\Sigma\ V^* = A = U\ \Sigma\ (U^*U)\,V^*$.

Posons $P = U\ \Sigma\ U^*$ et $U_0 = UV^*$.

On vérifie que $P \geq 0$ et que U_0 est unitaire.

Forme réduite de Jordan:

On va considérer par la suite des matrices carrées, la théorie de Schur en

a donné la forme triangulaire, or la forme de Jordan reste la plus proche de la forme diagonale, qui est la forme la plus simple.

On commence par introduire des notions en relation.

On appelle bloc de Jordan une matrice triangulaire de la forme:

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & . & 0 \\ & \lambda & 1 & 0 & . \\ & & . & . & 0 \\ & 0 & & . & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

On appelle forme de Jordan, une matrice partitionnée de la forme:

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & & \\ & J_{\lambda_2} & 0 & \\ & 0 & . & \\ & & & J_{\lambda_r} \end{pmatrix}$$

On montre que toite matrice carrée est semblable à une matrioce de la forme de Jordan, c'est à dire :

Il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}JP$.

On va adopter une méthode pratique pour construire la réduite de Jordan.

On remarque que si A est une application linéaire, on a les inclusions suivantes:

$N(A) \subset N(A^2) \subset ...$ et

$R(A) \subset R(A^2) \subset ....$

Dans les deux cas, les suites d'inclusions demeurent stationnaires, donc il existe un exposant k tel que

$N\left(A^k\right) = N\left(A^{k+1}\right) = ...$et

$R\left(A^k\right) = R\left(A^{k+1}\right) = ...$

On a la

Définition:

On appelle indice d'une matrice carrée A le plus petit entier k tel que $rg\left(A^k\right) = rg\left(A^{k+1}\right)$, on note $ind(A) = k$.

-Si A est inversible, alors $ind(A) = 0$.

-Si A est un idempotent, alors $ind(A) = 1$.

Proposition:

Soit A une matrice carrée, alors les assersions suivantes sont équivalentes:

1- $ind(A) = k$.

2- $rg\left(A^k\right) = rg\left(A^{k+1}\right)$.

3- $R\left(A^k\right) = R\left(A^{k+1}\right)$.

4- $N\left(A^k\right) = N\left(A^{k+1}\right)$.

5- $R\left(A^k\right) \cap N\left(A^k\right) = \{0\}$.

6- $X = R\left(A^k\right) \oplus N\left(A^k\right)$.

Indice d'une valeur propre:

Soit λ une valeur propre de A, on appelle indice de λ la grandeur $ind(A - \lambda I)$.

On a donc

$R\left(A-\lambda I\right)^k = R\left(A-\lambda I\right)^{k+1}$
$rg\left(A-\lambda I\right)^k = rg\left(A-\lambda I\right)^{k+1}$
$N\left(A-\lambda I\right)^k = N\left(A-\lambda I\right)^{k+1}$

Soit A une matrice carrée, $\sigma\left(A\right)=\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\}$ le spectre de A.
1- Notons α_i=dim $N(A-\lambda_i I)$,$alors \alpha_i$ est le nombre de blocs en λ_i :

$$J_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} J_{1,\lambda_i} & & & \\ & J_{2,\lambda_i} & 0 & \\ & 0 & . & \\ & & & J_{\alpha_i,\lambda_i} \end{pmatrix}$$

Où

$$J_{k,\lambda_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & . & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix},\ k=1,2,...,\ \alpha_i.$$

2- Le plus grand bloc dans J_{λ_i} est d'ordre $k_i = ind\left(\lambda_i\right)$.
3- Le nombre de blocs d'ordre k est donné par:
$n_k\left(\lambda_i\right) = r_{k-1}\left(\lambda_i\right) - 2r_k\left(\lambda_i\right) + r_{k+1}\left(\lambda_i\right)$, où $r_k\left(\lambda_i\right) = rg\left(A-\lambda_i I\right)^k$.

Donc, on a besoin chaque fois d'évaluer $rg\left(A-\lambda_i I\right)^k$.

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Les valeurs propres: $1,-1$, donc $J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_{-1} \end{pmatrix}$, l'un des blocs doit être d'ordre 2, on calcule
$k_1 = ind\left(1\right)$

$$A-I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \left(A-I\right)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg\left(A-I\right)=2,\quad rg\left(A-I\right)^2=1$

$$\left(A-I\right)^3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ rg\left(A-I\right)^3=1,$$ on conclue que $ind\left(1\right)=\mathbf{2}$,et donc,

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ valeurs propres } 3, -2, 2$$

$(A - 3I) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $rg\,(A - 3I) = 3$, $(A - 3I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & -3 \\ 5 & 13 & -6 & -12 \\ 0 & -6 & 1 & -6 \\ -5 & -12 & 6 & 13 \end{pmatrix}$, $rg\,(A - 3I)^2 = 3$

Donc $ind\,(3) = 1$

$(A + 2I) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $rg\,(A + 2I) = 3$, $(A + 2I)^2 = \begin{pmatrix} 25 & 27 & 0 & 27 \\ -5 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 24 & 16 & 24 \\ 5 & 8 & -4 & 8 \end{pmatrix}$, $rg\,(A + 2I)^2 = 3$

Donc $ind\,(-2) = 1$

$(A - 2I) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $rg\,(A - 2I) = 3$: $(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 8 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, $rg\,(A - 2I)^2 = 2$

$$(A - 2I)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ -13 & -35 & 16 & 29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 35 & -16 & -29 \end{pmatrix}, rg\,(A - 2I)^3 = 2.$$

Donc $ind\,(2) = 2$

En résumé, le plus grand bloc correspondant à la v.p. 2 est d'ordre 2, les autres valeurs d'indices 1,

$$j = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Département de Mathématique
Faculté de Math. et Informatique
Université M. Benboulaid Batna

Master1, Analyse fonctionnelle
Matière: Théorie des matrices

Inverses généralisés

La notion d'inversibilité joue un rôle important en mathématique, car beaucoup de problèmes sont posés d'une manière où la solution s'articule, en effet, sur la recherche de l'inverse. L'exemple de l' équations algébrique $ax + b = c$, $a \neq 0$ montre l'intérêt des inverses de b dans $ax = -b + c$, et de a dans $x = a^{-1}(-b + c)$.

Un autre exemple est le système linéaire suivant:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$
....
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m$

exprimé sous la forme matricielle $Ax = b$, où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$

On remarque que:

- Si A est carrée et inversible, alors le système $Ax = b$ possède une solution unique: $x = A^{-1}b$.

- Si A est carrée, mais non inversible, ou rectangulaire, on est devant un doute d'avoir une solution du système, même quand cette solution existe, le problème d'unicité se pose aussi.

L' idée d' inverse généralisé essaie de résoudre des problèmes de ce type, en proposant une matrice qui possède des proprietés aussi proches de celles de l'inverce, quand ce dernier n' existe pas.

Revenons à notre question, si X est une matrice donnant la solution $x = Xb$, alors on a $Ax = AXb = AXAx$, on a donc $AXA = A$, cette relation est verifiée si X est l' inverse de A.

Dans la théorie des inverses généralisés, on rencontre différents types d'inverses.

L'inverse interieur

On appelle inverse interieur d' une matrice A de type $m \times n$, $(m = n)$ non exclu, une matrice X de type $n \times m$ verifiant $AXA = A$.

Si A est inversible, inversible à gauche, ou à droite, alors ces invrses sont des inverses interieurs.

On note l'ensemble des inverses interieurs par $A(1)$.

Existence:
Proposition:

Toute matrice possède au moins un inverse interieur.

Preuve:

Soit A une matrice de type $m \times n$ et de rang $r \geq 1$, alors A peut être mise sous la forme:

$A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$, P et Q étant inversibles, soit $X = Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & Y \\ V & Z \end{pmatrix} P^{-1}$, Y , V et Z sont arbitraires, mais de formes appropriées.

On vérifie

$AXA = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QQ^{-1} \begin{pmatrix} I_r & Y \\ V & Z \end{pmatrix} P^{-1}P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q = A$.

La forme de X montre que l'on a pas d'unicité d'inverse interieur.

Remarque:

On exprime aussi A sous la forme:
$A = P\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$, où A_1 est une natrice inversible, alors $X = Q^{-1}\begin{pmatrix} A_1^{-1} & Y \\ V & Z \end{pmatrix} P^{-1}$ un inverse interieur.

Exemple:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est un inverse interieur.

Proposition:

Si X est un inverse interieur de A, alors
- AX et XA sont des idempotents, on a
- $R(AX) = R(A)$ et $N(XA) = N(A)$.

Preuve:

On a $(AX)^2 = (AXA)X = AX$.
$R(A) \supset R(AX) \supset R(AXA) = R(A)$ et
$N(A) \subset N(XA) \subset N(AXA) = N(A)$.
On remarque que $rg(A) = rg(AXA) \leq rg(X)$.

L'nverse exterieur:

On appelle inverse interieur d' une matrice A de type $m \times n$, une matrice X de type $n \times m$ verifiant $XAX = X$.

Si A est inversible, inversible à gauche, ou à droite, alors ces invrses sont des inverses exterieurs.

On note l'ensemble des inverses exterieurs par $A(2)$.

On a $X \in A(2) \Leftrightarrow A \in X(1)$.

L'nverse généralisé:

On appelle inverse généralisé, ou inverse symetrique d' une matrice A de type $m \times n$, une matrice X de type $n \times m$ verifiant $AXA = A$ et $XAX = X$ simultanément.

Si A est inversible, inversible à gauche, inversible à droite, alors ces invrses sont des inverse généralisés.

On note l'ensemble des inverses généralisés par $A(1,2)$.

Existence:

Proposition:

Toute matrice possède au moins un inverse généralisé.

Preuve:

Soit A une matrice de type $m \times n$ et de rang $r \geq 1$, alors A peut être mise sous la forme:

$A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$, P et Q étant inversibles, soit $X = Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, Y est arbitraire de forme appropriée.

On vérifie

$AXA = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QQ^{-1} \begin{pmatrix} I_r & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q = A.$

$XAX = Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q\, Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = Q^{-1} \begin{pmatrix} I_r & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = X.$

La forme de X montre que l'inverse généralisé n'ast pas unique.

Proposition:

Si X est un inverse généralisé de $A : E \to F$, alors
- AX et XA sont des idempotents, et on a
- $R(AX) = R(A)$
- $R(XA) = R(X)$
- $N(XA) = N(A)$.
- $N(AX) = N(X)$
-$E = N(A) \oplus R(X)$.
- $F = N(X) \oplus R(A)$
- $rg(A) = rg(A)$.

Preuve:

Comme A et X sont chacun inverse interieur de l'autre, on a directement les relations en images,en noyaux et en rangs.

Et du fait que XA est une projection définie sur E, on a
$E = N(XA) \oplus R(XA) = N(A) \oplus R(X)$.

De même AX est une projection définie sur F, on a
$F = N(AX) \oplus R(AX) = N(X) \oplus R(A)$.

Application:

Dans ce paragraphe, on va découvrir l'intérêt de l'inverse interieur dans la solution des éqution matricielles.

Théorème:

Soient A, B et C de types $m \times n$, $p \times q$ et $m \times q$ respectivement, alors l'équation matricielle

$$AXB = C \quad ... \qquad (1)$$

Admet une solution si et seulememt s'ils existent A_1et B_1 inverses interieurs de A et B respectivement tels que

$$AA_1CB_1B = C \quad ... \ (2)$$

Si la condition (2) est vérifiée, slors la solution générale de l'équation (1) est:

$$X = A_1CB_1 + Y - A_1AYBB_1 \text{ , } Y \text{ est arbitraire de type } n \times p.$$

Preuve:

Si (2) est véifiée, alors $X = A_1CB_1$ est une solution de (1).

Réciproquement, si X est solution de (1), alors $C = AXB = AA_1AXBB_1B = AA_1CB_1B$, la condition est nécéssaire.

De plus si Y est une matrice arbitraire de type $n \times p$, alors $W = Y - A_1AYBB_1$ est tel que $AWB = 0$,donc
$X = A_1CB_1 + Y - A_1AYBB_1$.

Corollaire:

Considérons le système linéaire $Ax = b$,alors une condition nécéssaire et suffisante pour que le le système admette une solution est que $AA_1b = b$, Si cette condition est vérifiée, slors la solution générale du système est:
$x = A_1b + v - A_1Av$. v est un vecteur à n lignes.

Exemple:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on choisit $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ comme inverse interieur, le système $Ax = b$, $b = (1, 2, 0, 1)^t$ n'admet pas de solution, car $AA_1b \neq b$. On vérifie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par contre pour $b = (1, 2, 0, 0)$,on a $AA_1b = b$, on a

$$A_1b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ donc,}$$

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + v - A_1Av,\ v = (x_1, x_2, ..., x_n)^t.$$

L'inverse de Moore-Penrose:

On appelle inverse de Moore-Penrose d'une matrice A , un inverse généralisé (symetrique) , X tel que les idempotents AX et XA soient auto-adjoints, c'est à dire une matrice X vérifiant les quatre équations:

$AXA = A$ ... (1)
$XAX = X$ ... (2)
$(AX)^* = AX$ ... (3) et
$(XA)^* = XA$ ... (4)

On note M-P pour désigner l'inverse de Moore-Penrose qui sera noté A^+dans la suite.

Si A est inversible, alors A^{-1} est aussi M-P de A.

Exemples:

1- Soit $\Sigma = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & 0 & \\ & & \dots & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ telle que $\lambda_i \neq 0$

alors $\Sigma^+ = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & 0 & \\ & & \dots & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

2- $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \end{pmatrix}$ où A_1 est une matrice inversible, alors
$A^+ = \begin{pmatrix} A_1^{-1} \\ \\ 0 \end{pmatrix}$.

Théorème:

Toute matrice possède un M-P inverse.

Preuve:

soit A une matrice de type $m \times n$ et de rang $r \geq 1$, alors par la décomposition selon les valeurs singulières, $\exists$ U et V matrices unitaires d'ordres m et n respectivement telles que $A = U \ \Sigma \ V^*$ où $\Sigma = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$S = diag\left(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r\right)$, et $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r \succ 0$.

On vérifie que $A^+ = V \ \Sigma^+ U^*$.

Ici $\Sigma^+ = \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

L'un des avantages du M-P inverse est son unicité.

Théorème:

L'inverse de Moore-Penrose est unique.

Preuve:

Supposons X et Y deux M-P inverses de A, alors,

$X = (XA)X = (A^*)X^*X = (A^*Y^*A^*)X^*X = A^*Y^*(A^*X^*)X = A^*Y^*(A^*X^*)X = A^*Y^*(XAX) = A^*Y^*X = YAX =$

$Y(AY)(AX) = YY^*(A^*X^*A^*) = YY^*A^* = YAY = Y.$

On remarque aussi que AA^+et A^+A sont des projections orthgoneles sur $R(A)$ et $R(A^*)$ respectivement,

On considère la partition: $E = N(A) \oplus R(A^+)$

On remarque que $R(A^+A) = R(A^+) = N(A)^\perp = R(A^*)$.

on note aussi $AA^+ = P_{R(A)}$ et $A^+A = P_{R(A^*)}$.

On a donc,

Proposition:

Si $A : E \to F$, alors

$E = N(A) \oplus R(A^*)$

$F = R(A) \oplus N(A^*)$.

On peut démontrer les proprietés suivantes:

Proposition:

On a

1- $(A^+)^+ = A^+$

2- $(A^*)^+ = (A^+)^*$

3- $(A^*A)^+ = A^+(A^*)^+$

4- $A^*AA^+ = A^+AA^* = A^*$

5- $(A^*A)^+A^* = A^*(AA^*)^+ = A^+$.

Application:
Proprietés minimales de l'inverse de Moore-Penrose.

Considérons une autre fois le système linéaire :

$$Ax = b \quad ... \quad (1)$$

On sait qu' une condition nécéssaire et suffisante pour que le le système (1) admette une solution est que $AA_1b = b$, pour un certain inverse interieur, en particilier si $AA^+b = b$, i.e $b \in R(AA^+) = R(A)$.

Si cette condition est n'est pas vérifiée, alors on considère la quantité $r = b - Ax$, appelée reste, ou partie résiduelle.

Notre but est de chercher à minimiser la valeur $\|r\|$.

Une valeur x_0 est dite solution approchée de (1), si elle minimise $\|r\|$ dans le sens où:

$\|Ax_0 - b\| \leq \|Ax - b\|, \quad \forall x \in E.$

Théorème:

Soit le système linéaire $Ax = b$, alors $x_0 = A^+b$ est une solution approchée de ce système.

Preuve:

Compte tenu de la décomposition:

$F = R(A) \oplus N(A^*)$, alors

$b = P_{R(A)}b + P_{N(A^*)}b$,donc

$Ax - b = Ax - P_{R(A)}b - P_{N(A^*)}b.$

On remarque que $Ax - P_{R(A)}b \in R(A)$ et $P_{N(A^*)}b \in N(A^*)$, donc

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|^2 &= \left\|Ax - P_{R(A)}b\right\|^2 + \left\|P_{N(A^*)}b\right\|^2 \\ &= \|r\|^2 \end{aligned}$$

Cette valeur atteint son minimum pour $Ax = P_{R(A)}b$, et comme $R(A) = R(AA^+)$, on obtient

$Ax = AA^+b$, c'est à dire $x_0 = A^+b$ est une solution approchée de (1).

Remarque:

La solution approchée n'est pas unique, car les éléments de la forme:

$x = A^+b + v - A^+Av$ minimisent $\|r\|$.

En pratique, on cherche la solution approchée de norme minimale, et suite à la décomposition:

$E = N(A) \oplus R(A^*)$, on a

$\|x\|^2 = \|A^+b\|^2 + \|v - A^+Av\|^2$.

Donc la solution approchée de norme minimale est $x_0 = A^+b$.

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ici } A^{+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$, le système $Ax = b$, $b = (1, 2, 0, 1)^{t}$ n'admet pas de solution,

alors $x_0 = A^{+}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est la solution approchée de norme minimale.

Comme on vient de le signaler, on rencontre différents types d'inverses, où chaqun d'eux s'adapte mieux à certains pronlèmes, parmi ces inverses, on va considérer:la solution approchée de norme minimale.

L'inverse de Drazin:

On a montré que si A est une matrice carrée d'indice k, alors A peut être mise sous la forme:

$A = P \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} P^{-1.}$

C inversible et N nilpotente, $N^{k} = 0$.

L'idée de la preuve est que, comme $ind\,(A) = k$,alors, $E = R\left(A^{k}\right) \oplus N\left(A^{k}\right)$, le choix d'une base suite à cette décomposition donne $A^{k} = P \begin{pmatrix} C^{k} & 0 \\ 0 & N^{k} \end{pmatrix} P^{-1}$, d'où la forme de A.

On définit

$A^{D} = P \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} P^{-1.}$, on vérifie,

Proposition:

1-$A^{D}AA^{D} = A^{D}...(1)$
2- $AA^{D} = A^{D}A...(2)$
3- $A^{k+1}A^{D} = A^{k}...(3)$

Définition:

Soit A une matrice carrée d'indice k, alors, il existe une matrice carrée A^{D}, vérifiant $1, 2$ et 3 appalée inverse de Drazin de A.

On remarque que si A est inversble, alors $A^D = A^{-1}$.

Proposition:

Soit A une matrice carrée d'indice k,alors,
1- $R\left(A^D\right) = R\left(A^k\right)$
2- $N\left(A^D\right) = N\left(A^k\right)$
3- $AA^D = A^D A = P_{R\left(A^k\right)}$.
4- $\left(A^*\right)^D = \left(A^D\right)^*$
5- $\left(A^k\right)^D = \left(A^D\right)^k$ pour tout naturel k.

Proposition:

Soit A une matrice carrée d'indice k, alors,
$AA^D A = A$ si et seulement si $k \leq 1$.

Preuve:

Si $k = 0$, alors $A^D = A^{-1}$.
Supposons $k \geq 1$, alors $AA^D A = A$
$P\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} P^{-1.} P \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1.} P \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} P^{-1.} = P \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1.}$
est vérifié si et seulement si $N = 0$, et commec $A^k = P\begin{pmatrix} C^k & 0 \\ 0 & N^k \end{pmatrix} P^{-1.}$'ce qui donne $k = 1$.
Un cas particulier de l'invrse de Drazin est le groupe inverse.

Le groupe inverse:

On appelle le groupe inverse, un inverse de Drazin d'indice $k \leq 1$.
Donc le groupe inverse, noté $A^\sharp$ verifie les équations:
1- $AA^\sharp A = A$
2- $A^\sharp AA^\sharp = A^\sharp$
3- $AA^\sharp = A^\sharp A$.

Proposition:

Si $A^\sharp$existe, alors, il est unique.

Preuve:

Si X est un autre groupe inverse de A, alors
$A^\sharp = \left(A^\sharp\right)^2 A = \left(A^\sharp\right)^2 A^2 X = A^\sharp \left(A^\sharp A^2\right) X = A^\sharp A X$
$= A^\sharp \left(A^2 X\right) X = \left(A^\sharp A^2\right) X^2 = A X^2 = X.$

Proposition:

1- Si A est non singulière, alors $A^\sharp = A^{-1}$
2- $\left(A^\sharp\right)^\sharp = A.$
3- $\left(A^*\right)^\sharp = \left(A^\sharp\right)^*.$
4- $\left(A^k\right)^\sharp = \left(A^\sharp\right)^k$ pour tout naturel k.

Remarque:

Si on note $\left(A^\sharp\right)^k = A^{-k}$, alors $AA^\sharp = A^0$, alors
$G = \left\langle A^k, k \in \mathbb{N} \right\rangle$ est un groupe d'unité $AA^\sharp$, ce qui justifie l'appelation du groupe inverse.

Proposition:

Supposons A telle que $ind\left(A\right) \leq 1$, alors $A^\sharp = A^+$, si et seulement si $AA^+ = A^+ A$.

Preuve:

Supposons que $AA^+ = A^+ A$, alors A^+ vérifie les équations du groupe inverse, donc $A^\sharp = A^+$.
Réciproquement, si $A^\sharp = A^+$, alors,
$AA^+ = AA^\sharp = A^\sharp\ A = A^+ A.$