Faculté de Math et Informatique
Département de Maths
Université de Batna 2

Opérateurs linéaires non bornés

1) Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un op. li.
on munit H_1 de la norme du graphe
$\|x\|_A = \|Ax\| + \|x\|$. Montrer que :
A est fermé $\Leftrightarrow$ $(\mathcal{D}(A), \|\ \|_A)$ est complet.

2) Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \to H_2$ un op. li. fermé
tq $\exists\, c > 0$ vérifiant $\|Ax\| \geq c\|x\|$, $\forall x \in \mathcal{D}(A)$
Montrer que :
a) $R(A)$ est fermé.
b) $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow R(A)$ est inversible, et d'inverse borné.

3) Soit $U : H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur unitaire,
G un s.e.v de H_1, montrer que
$U(G^{\perp}) = (U(G))^{\perp}$.

4) Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \to H_2$ un op. li borné,
montrer que A est fermé ssi $\mathcal{D}(A)$ est fermé.

5) Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un op. fermé ; $B : H_1 \to H_2$
un op. borné ; montrer que $A+B$ est fermé.

6) Montrer que si A est fermé, alors $N(A)$ est fermé. La réciproque n'est pas vraie?

7) Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un op. linéaire

Définir

$$U : H_1 \times H_2 \longrightarrow H_2 \times H_1$$
$$(x, y) \longmapsto (y, -x)$$

$$V : H_1 \times H_2 \longrightarrow H_2 \times H_1$$
$$(x, y) \longmapsto (y, x)$$

- Montrer que U et V sont des isomorphismes,

définir U^{-1} et V^{-1} et montrer que

$$U^{-1}V = V^{-1}U .$$

Supposons A densément défini, montrer que $G(A^*) = (U\, G(A))^{\perp}$.

8) Soit f une forme linéaire non bornée, de domaine $\mathcal{D}(f) \subset H$ et $0 \neq x_0 \in H$, on définit $A : \mathcal{D}(f) \subset H \longrightarrow H$

$$x \longmapsto Ax = f(x) \cdot x_0 .$$

Montrer que A est non borné, non fermable, que A^* existe.

Déterminer $\mathcal{D}(A^*)$ et A^*.