Faculté de Maths et Informatique
Département de Maths
Université de Batna 2

Opérateurs linéaires non bornés

1) Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \to H_2$ un op. li.
On munit H_1 de la norme du graphe
$\|x\|_A = \|Ax\| + \|x\|$. Montrer que :
A est fermé $\Leftrightarrow$ $(\mathcal{D}(A), \|\ \|_A)$ est complet.

2) Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \to H_2$ un op. li. fermé
tq $\exists\ c > 0$ vérifiant $\|Ax\| \geq c\|x\|$, $\forall x \in \mathcal{D}(A)$
Montrer que :
a) $R(A)$ est fermé.
b) $A : \mathcal{D}(A) \to R(A)$ est inversible, et d'inverse borné.

3) Soit $U : H_1 \to H_2$ un opérateur unitaire, G un s.e.v de H_1, montrer que
$U(G^\perp) = (U(G))^\perp$.

4) Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \to H_2$ un op. li borné, montrer que A est fermé ssi $\mathcal{D}(A)$ est fermé.

5) Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \to H_2$ un op. fermé ; $B : H_1 \to H_2$ un op. borné ; montrer que $A+B$ est fermé.

6) Montrer que si A est fermé, alors $N(A)$ est fermé. La réciproque n'est pas vraie?

7) Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \to H_2$ un op. linéaire. Définir

$$U : H_1 \times H_2 \longrightarrow H_2 \times H_1$$
$$(x, y) \longmapsto (y, -x)$$

$$V : H_1 \times H_2 \longrightarrow H_2 \times H_1$$
$$(x, y) \longmapsto (y, x)$$

- Montrer que U et V sont des isomorphismes, définir U^{-1} et V^{-1} et montrer que

$$U^{-1}V = V^{-1}U .$$

Supposons A densément défini, montrer que $G(A^*) = (U\,G(A))^{\perp}$.

8) Soit f une forme linéaire non bornée, de domaine $\mathcal{D}(f) \subset H$ et $0 \neq x_0 \in H$, on définit

$$A : \mathcal{D}(f) \subset H \longrightarrow H$$
$$x \longmapsto Ax = f(x) \cdot x_0 .$$

Montrer que A est non borné, non fermable, que A^* existe.

Déterminer $\mathcal{D}(A^*)$ et A^*.

9) A et B étant deux op. lin. densément définis tq $A \subset B$; montrer que $B^* \subset A^*$.

10) A, B et $A+B$ étant des opérateurs densément définis, montrer que

$$(A+B)^* \supset A^* + B^*$$

Supposons que B soit borné. Montrer que

$$(A+B)^* = A^* + B^*$$

11) Soit A un opérateur lin, injectif et fermable ; montrer que :

$$V\, G(\bar{A}) = \overline{G(A^{-1})}$$

En déduire que A^{-1} est fermable si et seulement si $\bar{A}$ est injectif.

12) Soit A un opérateur symétrique, $\lambda \in \mathbb{C}$ tq $\Im m\, \lambda \neq 0$; montrer que $\lambda \in \hat{\rho}(A)$.

13) Montrer que si A est fermable, alors

- $R(\bar{A} - \lambda) = \overline{R(A-\lambda)}$
- $\hat{\rho}(\bar{A}) = \hat{\rho}(A)$
- $d_\lambda(\bar{A}) = d_\lambda(A)$, $\forall \lambda \in \hat{\rho}(A)$.

14) A et B étant deux op. lin. symétriques tq $A \subset B$ et $R(A+i) = R(B+i)$; montrer que $A = B$.

15) On définit sur $L^2_{(\mathbb{R})}$ l'opérateur

$$M : f \longrightarrow t f(t) \quad \text{tq}$$

$$\mathcal{D}(M) = \{ f \in L^2_{(\mathbb{R})} \ , \ tf \in L^2_{(\mathbb{R})} \}$$

Montrer que M est densément défini ; symétrique, M est-t-il auto-adjoint ?

16) Soit A un opérateur lin. densement défini et symétrique, montrer les équivalences :

1) A est essentiellement auto-adjoint.

2) $\mathcal{N}(A^* \pm i) = 0$

3) $\overline{R(A \pm i)} = H$

Exo 10)

A, B, $A+B$ devraient définis, Montrer que $(A+B)^* \supset A^* + B^*$

Soit $y \in \mathcal{D}(A^*+B^*)$, alors pour tout $x \in \mathcal{D}(A+B) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ on a :

$$(x, (A^*+B^*)y) = (x, A^*y) + (x, B^*y)$$

$$= (Ax, y) + (Bx, y)$$

$$= ((A+B)x, y)$$ ce qui montre que $y \in \mathcal{D}((A+B)^*)$ d'où l'inclusion.

Exo 10) Suite

Si B est borné, montrons que $(A+B)^* = A^* + B^*$; Comme $(A+B)^* \supset A^* + B^*$, il suffit de montrer que $\mathcal{D}(A+B)^* \subset \mathcal{D}(A^*+B^*)$

B est borné, donc $\mathcal{D}(B) = H_1$, $\mathcal{D}(B^*) = H_2$, alors $\mathcal{D}(A+B) = \mathcal{D}(A)$ et $\mathcal{D}(A^*+B^*) = \mathcal{D}(A^*)$.

Soit $y \in \mathcal{D}(A+B)^*$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A+B)$;

$$(x, ((A+B)^* - B^*)y) = (x, (A+B)^* y) - (x, B^* y) = ((A+B)x, y) - (Bx, y)$$

$$= (Ax, y) \Longrightarrow y \in \mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A^*+B^*)$$, donc $A^* + B^* \supset (A+B)^*$

Exo 11

$$\overline{G(A^{-1})} = \overline{V\,G(A)} = V\,\overline{G(A)}$$

$$= V\,G(\bar{A}) \qquad \text{(A est fermable)}$$

$$\text{(V isomorphisme)}$$

Montrons que A^{-1} est fermable ssi $\bar{A}$ est injectif.

Si $\bar{A}$ est injectif, alors $\bar{A}^{-1}$ est une extension fermée de A^{-1}, c'est à dire A^{-1} est fermable.

Réciproque :

<u>supposons</u> A^{-1} fermable et $\bar{A}x = 0$:

$\overline{G(A^{-1})} = V\,G(\bar{A})$ est graphe

$V\,G(\bar{A}) = \{ V(x, \bar{A}x) = (\bar{A}x, x) \}$

si $\bar{A}x = 0 \Rightarrow x = 0$ donc $\bar{A}$ est injectif.

Exo 12)

Montrons que si A est symétrique et $\lambda \in \mathbb{C}$ tq $\Im m \lambda \neq 0$, alors $\lambda \in \hat{\rho}(A)$.

Soit $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta = \Im m \lambda \neq 0$

pour $x \in \rho(A)$, alors

$$\|(A-\lambda)x\|^2 = ((A-\alpha)x - i\beta x, (A-\alpha)x - i\beta x)$$

$$= \|(A-\alpha)x\|^2 + \|\beta x\|^2 - i\beta(x, (A-\alpha)x) + ((A-\alpha)x, -i\beta x)$$

$$= \|(A-\alpha)x\|^2 + \|\beta x\|^2 - i\beta(x, (A-\alpha)x) + i\beta(x, (A-\alpha)x) \quad \text{(symétrie de } A-\alpha\text{)}$$

$$= \|(A-\alpha)x\|^2 + \|\beta x\|^2 \geq |\beta|^2 \|x\|^2$$

donc $\|(A-\lambda)x\| \geq |\beta| \|x\|$, donc $\lambda \in \hat{\rho}(A)$

Exo 13)

A fermable, montrons que $R(\bar{A}-\lambda) = \overline{R(A-\lambda)}$.

si A est fermable, alors $\bar{A}-\lambda$ est fermé et inf borné, donc $R(\bar{A}-\lambda)$ est fermé.

car on a : $R(A-\lambda) \subseteq R(\bar{A}-\lambda)$

et $R(\bar{A}-\lambda)$ est fermé, donc

$\overline{R(A-\lambda)} \subset R(\bar{A}-\lambda)$.

Réciproque :

soit $y \in R(\bar{A}-\lambda)$, alors

$\exists\, x \in D(\bar{A})$ tq $y = (\bar{A}-\lambda)x$

or de la définition de $\bar{A}$;

$x = \lim x_n$; $x_n \in D(A)$ et (Ax_n) converge ; donc $y = \lim (A-\lambda)x_n \in \overline{R(A-\lambda)}$.

17) Suite.

Montrons que $\hat{\rho}(\bar{A}) = \hat{\rho}(A)$:

Il est clair que $\hat{\rho}(\bar{A}) \subset \hat{\rho}(A)$.
Soit maintenant $\lambda \in \hat{\rho}(A)$ et $x \in \mathcal{D}(\bar{A})$, alors :

$$\|(\bar{A}-\lambda)x\| = \lim \|(A-\lambda)x_n\| \geq$$
$$\lim C_\lambda \|x_n\| = C_\lambda \|x\| \text{ , donc}$$

$\lambda \in \hat{\rho}(\bar{A})$. $\quad$ $(x = \lim x_n,\ x_n \in \mathcal{D}(A))$

- Montrons que $d_\lambda(\bar{A}) = d_\lambda(A)$.

D'après la relation
$R(\bar{A}-\lambda) = \overline{R(A-\lambda)}$ et si F est un s.e.v de H, alors $F^\perp = \bar{F}^\perp$, on obtient :

$$d_\lambda(\bar{A}) = \dim(R(\bar{A}-\lambda))^\perp = \dim \overline{R(A-\lambda)}^\perp = \dim(R(A-\lambda))^\perp.$$

Exo 14)

A et B symétriques tq $A \subset B$ et $R(A+i) = R(B+i)$; montrer que $A = B$.

Il suffit de montrer que $D(B) \subset D(A)$

Donc, pour $x \in D(B)$, $(B+i)x \in R(A+i)$, alors $\exists x_1 \in D(A)$ tq

$(B+i)x = (A+i)x_1 = (B+i)x_1$

et comme B est symétrique ; alors $(B+i)$ est injectif ?

$\Rightarrow x = x_1 \in D(A)$.