Solutions

7) Par opérations élémentaires

$$\begin{pmatrix} I & A \\ B & I \end{pmatrix} \underset{L_1 - AL_2}{\sim} \begin{pmatrix} I - AB & 0 \\ B & I \end{pmatrix} \underset{C_1 - C_2B}{\sim} \begin{pmatrix} I - AB & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & A \\ B & I \end{pmatrix} \underset{L_2 - BL_1}{\sim} \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I - BA \end{pmatrix} \underset{C_2 - C_1A}{\sim} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I - BA \end{pmatrix}$$

Donc $rg \begin{pmatrix} I & A \\ B & I \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} I - AB & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I - BA \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad rg(I - AB) = rg(I - BA)$

Conséquence : $I - AB$ inversible $\Leftrightarrow$ $I - BA$ inv.

8) $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \underset{L_1 + L_2}{\sim} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix} \underset{C_1 + C_2}{\sim} \begin{pmatrix} A+B & B \\ B & B \end{pmatrix}$

donc $rg \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = rg(A) + rg(B) = rg \begin{pmatrix} A+B & B \\ B & B \end{pmatrix} \geq$

$rg(A+B)$.

9) On remarque que :

$\forall$ la matrice carrée X ; on a

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ X & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$$

On a donc

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ I & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$$

On rappelle que deux matrices équivalentes n'ont pas même déterminant, mais les opérations élémentaires sont toujours utiles,

On remarque que :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ I & B \end{pmatrix} \underset{l_1 \leftrightarrow l_2}{\sim} \begin{pmatrix} I & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{schur}}{\sim} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -AB \end{pmatrix}$$

On a ici $\det \begin{pmatrix} I & B \\ A & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -AB \end{pmatrix}$

mais

$$\begin{pmatrix} I & B \\ A & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ I & B \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\det \begin{pmatrix} I & B \\ A & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ I & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -AB \end{pmatrix}$$

ie : $(-1)^n \det A \cdot \det B = \det I \cdot \det(-AB)$

ie $(-1)^n \det A \cdot \det B = (-1)^n \det AB$

$\Rightarrow \det A \cdot \det B = \det AB$

On a ici $\det \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = (-1)^n$ et $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

ie $\det(-AB) = (-1)^n \det(AB)$.

10) Du cours $\mathrm{rg}(A+B) \leq \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B)$

alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A+B-B) \leq \mathrm{rg}(A+B) + \mathrm{rg}(-B)$

$\mathrm{rg}(-B) = \mathrm{rg}(B)$; donc

$\mathrm{rg}(A) - \mathrm{rg}(B) \leq \mathrm{rg}(A+B)$; remplacer B, par A.

11) X étant le sous espace de départ ; par hypothèse $X = F \oplus N(A)$; donc

$AX = AF$ donc $\mathrm{rg}(A) = \dim R(F)$.

12) Si $x \in N(A)$; alors $Ax = 0 \Rightarrow A^*Ax = 0$;

réciproquement, si $A^*Ax = 0$; alors $\forall y \in X$;

$0 = (A^*Ax, y) = (Ax, Ay)$; pour $y = x$ on a :

$(Ax, Ax) = \|Ax\|^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0$; donc $x \in N(A)$,

la deuxième partie se fait de la même chose.

13) On utilise le resultat de l'exercice 12) pour montrer $N(AA^t) = N(A^t)$, si $A^t x = 0$, alors $AA^t x = 0$ donc $N(A^t) \subset N(AA^t)$, reciproque si $AA^t x = 0 \Rightarrow A^t x = 0$ donc $N(AA^t) \subset N(A^t)$,

Montrons que $R(A) = R(AA^t)$: on a

$R(A) = N(A^t)^\perp = N(AA^t)^\perp = R(AA^t)$, de même

$R(A^t) \supset R(A^tA)$ et

$rg(A^tA) = rg(A) - \dim(N(A^t) \cap R(A)) = rg(A)$

car $N(A^t) \cap R(A) = \{0\}$.

donc $R(A^t) = R(A^tA)$.

de même

$N(A) = R(A^t)^\perp = R(A^tA)^\perp = N(A^tA)$

$rg(A^tA) = rg(AA^t) = rg(A) = rg(A^t)$ est une simple conclusion de ce qui précède.

14. On a

$rg(A+B) = rg(A \quad B) = \dim R(A) + \dim R(B) - \dim(R(A) \cap R(B))$.

Or si $y \in R(A) \cap R(B)$, alors

$y = Ax_1 = Bx_2$, donc

$(y, y) = (Bx_2, Ax_1) = (x_2, B^*Ax_1) = 0$

donc $\|y\| = 0 \Rightarrow y = 0$, d'où

$rg(A+B) = rg(A) + rg(B)$.