15) Montrer que si les produits sont définis, alors :

$$\operatorname{rg}(BA) = \operatorname{rg}({}^tB\,B\,A) \quad \text{et}$$

$$\operatorname{rg}(AC) = \operatorname{rg}(A\,C\,{}^tC) .$$

16) Montrer que l'on a :

$R(A) \subset R(B)$ ssi $\exists C$ tq $A = BC$.

$N(A) \subset N(B)$ ssi $\exists C$ tq $A = CB$

17) Soit $A : X \longrightarrow X$, $\dim X = n$, supposons $\exists F$ s.ev de X, $\dim F = r < \dim X$; F invariant pour A ($AF \subset F$), montrer que A admet la représentation $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

A_1 inversible d'ordre r ssi $A|_F$ est injective.

18) Supposons $A : X \longrightarrow X$, $\dim X = n$ et $X = F \oplus G$ où F et G sont invariants pour A ; montrer que A admet la représentation $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

19) Soient A et B deux matrices triangulaires supérieures, montrer que AB est aussi triangulaire supérieure.

21) Soit A une matrice carrée d'ordre n et de rang $r \geq 1$, montrer que les propositions suivantes sont équivalentes:

1) $R(A) = R(A^*)$

2) $N(A) = N(A^*)$

3) $X = R(A) \oplus N(A)$

4) $A = U \begin{pmatrix} A_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*$; A_r inversible d'ordre r

22) Exprimer la décomposition selon les valeurs singulières de la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

23) Soit A une matrice symétrique (Autoadjointe); montrer que $Ind(A) \leq 1$.

24) Montrer que si $Ind(A) = k$; alors $R(A^k) = R(A^m)$ $\forall\, m > k$.

25) Soit A une matrice carrée ; montrer que les propositions suivantes sont équivalentes

1) $Ind(A) = k$

2) $rg(A^k) = rg(A^{k+1})$

3) $R(A^k) = R(A^{k+1})$

4) $N(A^k) = N(A^{k+1})$

5) $X = R(A^k) \oplus N(A^k)$.

26) Soit A une matrice carrée d'ordre n, et de rang $r < n$; montrer que l'on peut mettre A sous la forme :

$$A = P \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} P^{-1}$$

où P inversible ; N nilpotente et C inversible d'ordre r.

27) Montrer que si A est inversible, alors A possède une décomposition polaire unique.

28) Montrer que si A est idempotent ; alors $P^{-1}AP$ l'est aussi.

29) Exprimer la réduite de Jordan pour la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

24) Exprimer la réduite de Jordan

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

25) Soit J_λ un bloc de Jordan pour $\lambda \neq 0$, montrer que J_λ est inversible et déterminer J_λ^{-1}.

26) Montrer que si J_λ est un bloc de Jordan alors J_λ et J_λ^t sont semblables :
$\exists$ P inversible tq $J^t = P^{-1} J P$.

27) Soit A un projecteur ; montrer que si $rg(A) = r$; alors

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P.$$