33) Calculer les inverses généralisés des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

34) Vérifier que $X \in A(1,2)$; $Y \in B(1,2)$ alors $\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} (1,2)$

35) Calculer les inverses généralisés des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

36) Soit A une matrice de type $m \times n$ et de rang $r \geq 1$, $X \in A(1)$.
Montrer que
1) $XA = I_n \iff r = n$
2) $AX = I_m \iff r = m$

37) Montrer que : $A^+ AA^+ = A^+ AA^+ = A^+$

38) Montrer que si $AA^* = A^*A$ (Anormale) alors $AA^+ = A^+A$.

39) Soit X un inverse intérieur de A ; Montrer que : $R(A^*X^*) = R(A^*)$

40) Donner un exemple où :

$$(AB)^+ \neq B^+A^+ .$$

41) Soit A une matrice de type $m \times n$, de rang $r \geq 1$, $A = FG$ une décomposition à rang complet.

- Montrer que F^*AG^* est inversible
- Montrer que

$$A^+ = G^*(F^*AG^*)^{-1}F^* .$$

Solutions

33) On vérifie que $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ est son propre inverse généralisé.

Pour $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$; on remarque que $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ par permutation de colonnes ; ou bien :

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},$$ d'où

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$ est un inverse généralisé de la matrice donnée ;

34) Simple vérification ; supposons $AXA=A$ et $BYB=B$, alors

$$\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X&0\\0&Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AXA&0\\0&BYB\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}.$$

35) On remarque que A et B sont diagonales en blocs, donc

$$A(1,2)=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{-1}&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$ et

$$B(1,2)=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

36) Répondons à 1)

Si $XA = I_n$, alors A est inversible à gauche $\Longrightarrow$ $rg(A) = n$.

Supposons $rg(A) = n$ et $AXA = A$

$\Longrightarrow$ $rg\, X = n$ et $rg(XA) = n$, $n\ rg(X) \geq n$ $\Rightarrow$ XA inversible

XA est une projection inversible $\Rightarrow XA = I_n$.

37) Montrons par exemple

$$A^*AA^+ = A^*.$$

On a $A^*AA^+ = A^*(AA^+)^* = (AA^+A)^* = A^*$.

38) De $AA^* = A^*A$ on obtient

$R(AA^*) = R(A) = R(A^*)$; de plus $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*)$

mais AA^+ et A^+A sont des projecteurs orthogonaux

avec $R(AA^+) = R(A) = R(A^*) = R(A^+A)$ et

$\mathcal{N}(AA^+) = \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^+A)$

donc $AA^+ = A^+A$.

39) On a

$R(A^*) \supset R(A^*X^*) \supset R(A^*X^*A^*) = R((AXA)^*)$

$= R(A)$.

40) Considérons $A = \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

Pour calculer A^+, on remarque que

$\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} \underset{L_2: L_2-L_1}{\sim} \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, i.e $\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

$$\text{donc } \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}$$

$AB = \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$; donc $(AB)^+ = \begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}$

mais $B^+A^+ = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

41) Pour montrer que F^*AG^* est inversible, il suffit de remarquer qu'il s'agit d'une matrice d'ordre r et de rang r, car ici F^* et G^* sont de rangs complets :

$$rg(F^*AG^*) = rg(AG^*) = rg(A) = r.$$

Montrons par exemple:

$$\begin{aligned} AA^+A &= FGG^*(F^*FGG^*)^{-1}F^*FG \\ &= FGG^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*FG \\ &= FG = A \end{aligned}$$

, on vérifie les autres équations.

تقبل الله الصيام والقيام.