14) A et B étant deux op. lin. symétriques tq $A \subset B$ et $R(A+i) = R(B+i)$; montrer que $A = B$.

15) On définit sur $L^2_{(\mathbb{R})}$ l'opérateur

$$M : f \longrightarrow t f(t) \quad \text{tq}$$

$$\mathcal{D}(M) = \{ f \in L^2_{(\mathbb{R})} \,,\ tf \in L^2_{(\mathbb{R})} \}$$

Montrer que M est densément défini ; symétrique, M est-t-il auto-adjoint ?

16) Soit A un opérateur lin. densement défini et symetrique, montrer les équivalences :

1) A est essentiellement auto-adjoint.

2) $\mathcal{N}(A^* \pm i) = 0$

3) $\overline{R(A \pm i)} = H$.

17) Soient A, B et AB des opérateurs densément définis, montrer que $(B^*A^*) \subset (AB)^*$.
Supposons A borné ; montrer que $(AB)^* = B^*A^*$.

18) Une fonction complexe définie sur $[a,b]$ est dite absolument continue sur $[a,b]$, s'il existe $g \in L^1_{[a,b]}$, et une constante $c \in \mathbb{C}$, tq $f(x) = \int_a^x g(t)\,dt + c$.
On définit sur $L^2_{[a,b]}$, l'opérateur A :

$$Af = -if' = -i\frac{df}{dt}, \quad f \in \mathcal{D}(A);$$

$$\mathcal{D}(A) = \{ f \text{ abs. continue},\ f' \in L^2_{[a,b]} \text{ et } f(a) = f(b) = 0 \}$$

Montrer que :
- $\mathcal{D}(A)$ est dense dans $L^2_{[a,b]}$.
- A est non borné et symétrique.

19) A étant un opérateur symétrique tq $\mathcal{D}(A) = H$. Montrer que A est borné.

Exo 14)

A et B symétriques tq $A \subset B$ et $R(A+i) = R(B+i)$; montrer que $A = B$.

Il suffit de montrer que $D(B) \subset D(A)$

Donc, pour $x \in D(B)$, $(B+i)x \in R(A+i)$, alors $\exists\, x_1 \in D(A)$ tq

$$(B+i)x = (A+i)x_1 = (B+i)x_1$$

et comme B est symétrique ; alors $(B+i)$ est injectif ?

$\Rightarrow x = x_1 \in D(A)$.

15) $M : f \longrightarrow t f(t)$

$\mathcal{D}(M) = \{ f \in L^2_{(\mathbb{R})} , tf \in L^2_{(\mathbb{R})} \}$

$\mathcal{D}(M)$ contient les fonctions continues à support compact, qui sont dense dans $L^2_{(\mathbb{R})}$, donc $\mathcal{D}(M)$ est fermé.

Exemple de fonction à support compact

f tq $f(x) = 0$ pour $x \notin [-n, n]$.

M est symétrique

Soit $f, g \in \mathcal{D}(M)$, alors

$$(Mf, g) = \int t f(t) \bar{g}(t) dt$$
$$= \int f(t) \overline{t g(t)} dt = (f, Mg)$$

Donc M est symétrique ie $M \subset M^*$, Montrons que $M^* \subset M$.

Soit $g \in \mathcal{D}(M^*)$, pour $n \in \mathbb{N}$

Posons $h_n = Mg \chi_{[-n, n]}$

$h_n \in \mathcal{D}(M)$, on a

$$\|h_n\|^2 = \int_{-n}^{n} |t g(t)|^2 dt = (M h_n, g)$$

$$= (h_n, M^* g) \le \|h_n\| \, \|M^* g\|$$

ie, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|h_n\| \le \|M^* g\|$

donc $\sup \|h_n\| \le \|M^* g\| \Rightarrow$

$g \in \mathcal{D}(M)$ et $\mathcal{D}(M^*) \subset \mathcal{D}(M)$.

On peut généraliser la question comme suit:

Au lieu de t, on considère l'opérateur

$$M_g : f \longmapsto g(t) f(t) .$$

$$\mathcal{D}(M_g) = \{ f \in L^2_{(\mathbb{R})} , \; gf \in L^2_{(\mathbb{R})} \}$$

M_g est symétrique et $(M_g)^* = M_{\bar{g}}$

donc M est auto-adjoint ssi g est réelle

16) A symétrique, densément défini. alors, on a équivalence :

1) A est essentiellement auto-adjoint

2) $\mathcal{N}(A^* \pm i) = 0$

3) $\overline{R(A \pm i)} = H$

Solution.

1) $\Rightarrow$ 2) si A est essent. auto-adjoint, alors $\overline{A^*} = A^* = \overline{A}$, donc

$$\mathcal{N}(A^* \pm i) = \mathcal{N}(\overline{A}^* \pm i) = 0$$

2) $\Rightarrow$ 3) $\overline{R(A \pm i)} = R(\overline{A} \pm i) =$

$$\mathcal{N}(\overline{A}^* \mp i)^\perp = \mathcal{N}(A^* \mp i) = H .$$

3) $\Rightarrow$ 1)

$$\overline{R(A \pm i)} = R(\overline{A} \pm i) = H$$

$\Rightarrow d_\pm(\overline{A}) = 0$; or $\overline{A}$ est aussi symétrique $\Rightarrow$ $\overline{A}$ est auto-adjoint

17) Montrons que $B^*A^* \subset (AB)^*$.

Soit $x \in \mathcal{D}(AB)$ et $y \in \mathcal{D}(B^*A^*)$, alors $x \in \mathcal{D}(B)$, $y \in \mathcal{D}(A^*)$ et

$(Bx, A^*y) = (x, B^*A^*y)$, donc

$(ABx, y) = (Bx, A^*y) = (x, B^*A^*y)$

donc $y \in \mathcal{D}(AB)^*$.

Supposons A borné, alors A^* est aussi borné, $\mathcal{D}(A) = H_1$; $\mathcal{D}(A^*) = H_2$.

Si $y \in \mathcal{D}((AB)^*)$, on a pour $x \in \mathcal{D}(B)$, $x \in \mathcal{D}(AB)$, alors

$(Bx, A^*y) = ((AB)x, y) = (x, (AB)^*y)$

ce qui donne $A^*y \in \mathcal{D}(B^*) = \mathcal{D}(B^*A^*)$

i.e. $y \in \mathcal{D}(B^*A^*)$.

18) $\mathcal{D}(A)$ contient les polynomes s'annulant en a et b, donc $\mathcal{D}(A)$ est dense dans $L^2_{[a,b]}$

A est non borné :

Considérons la suite

$f_n(t) = (a-t)(b-t) \sin nt = \varphi(t) \sin nt,$

$t \in [a,b]$

alors f_n est borné, tandis que

$\|A f_n\| \geq n \|\varphi\|$.

Montrons que A est symétrique :

Soit $f, g \in \mathcal{D}(A)$:

$(Af, g) = \int_a^b -i f'(t) \bar{g}(t) dt$ intégrons par parties

$= -i f(t) \bar{g}(t) \Big|_a^b + \int_a^b i f(t) \bar{g}'(t) dt$

$= (f, -ig') = (f, Ag)$.

2°) A symétrique et $\mathcal{D}(A) = H$:

on a $A \subset A^*$; et comme $\mathcal{D}(A) = H$

alors $A = A^*$, donc A est fermé.

Par le Th. du graphe fermé, A est borné.