Théorèmes fondamentaux
(Suite)

8) Soit f une forme linéaire définie sur un e.v.n X, $H = \mathcal{N}(f)$, $x_0 \notin H$.
- Montrer que $X = H \oplus \mathbb{R} x_0$
- Montrer que f est continue ssi H est fermé.

9) Soit X un e.v.n, montrer que pour tout $x \in X$,
$$\|x\| = \sup_{f \in X', \|f\| = 1} |f(x)| .$$

10) Soit $x_0 \in X$, F un sous ensemble dense de X' tq $f(x_0) = 0$, $\forall f \in F$.
Montrer que $x_0 = 0$.

11) Soit $X = \left(C_{[-1,1]}, \|\ \|_1 \right)$, on définit l'opérateur
$$A : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto f(1)$$
- Montrer que A est linéaire. Notons $f_n(x) = \sqrt{n}\, x^n$, calculer $\|f_n\|$, et montrer que $F = \{ f \in X ;\ f(1) = 0 \}$ est dense dans X.

12) Soit X un espace de Banach, Notons $\pi : X \longrightarrow X/_F$
$$x \longmapsto x + F$$
Montrer que π est ouverte.

13) X et Y étant deux espaces de Banach, $A \in B(X, Y)$. Montrer l'équivalence
1- A est injectif et $R(A)$ est fermé dans Y.
2- $\exists\, c > 0$, tq $\|Ax\| \geq c\|x\|$, $\forall x \in X$.

14) Soient X un espace de Banach, A et B deux opérateurs lin. définis sur X; tq A est borné et B fermé; montrer que $A+B$ est fermé.

15) X et Y sont deux e.v.n; on définit $A : X \longrightarrow Y$ un op. lin, on suppose qu'il existe $r > 0$ tq $B_Y(0,r) \subset A B_X(0,1)$, montrer que A est surjectif.

16) Soit A un opérateur linéaire fermé défini sur un espace de Banach X tq $\exists\, c > 0$, $\forall x \in X$, $\|Ax\| \geq c\|x\|$. Montrer que $R(A)$ est fermé.